LOS HOMBRES de la historia

la Historia Universal
a través de
sus protagonistas

77

Arquímedes

Attilio Frajese

Centro Editor de
América Latina



LOS HOMBRES de la historia

77

Arquímedes, el más grande matemático de la civilización griega y uno de los mayores de todos los tiempos, vivió en el siglo III a. C.; se sabe que fue muerto durante el saqueo de Siracusa (212 a. C.) a la edad, parece, de setenta y cinco años y que, por lo tanto, su fecha probable de nacimiento fue el 287 a. C.
Este eximio matemático, aunque trata de un modo admirable las cuestiones de la matemática teórica más pura, no desdeña de ningún modo las aplicaciones prácticas, desde las reglas de medida y los cálculos aritméticos numéricos hasta el estudio de la mecánica, la fundación de la hidrostática, tan admirada por Galileo, y la construcción de máquinas a partir de las aplicaciones de la palanca. Por eso puede decirse que Arquímedes fue también el mayor ingeniero de la antiguedad, en el sentido más amplio de quien construye la teoría. El alcanza el equilibrio característico del espíritu griego: como matemático puede sobrepasar a Euclides en lo que respecta a rigor lógico y limpieza de concepciones, pero al mismo tiempo permanece unido a la vida de todos los días con sus exigencias prácticas ordinarias y extraordinarias. Encontramos que en su obra se cumple muy bien la imagen del gran matemático alemán Félix Klein, para quien la matemática pura podría compararse a un poderoso y perfecto esqueleto óseo en torno del cual la carne está constituida por las aplicaciones de la matemática misma: en la obra de Arquímedes se encuentra el organismo vivo completo.
La famosa frase que ha llegado hasta nosotros "Dadme un punto de apoyo y levantaré la Tierra", aunque evidentemente exagerada y sin fundamento histórico seguro, es sin embargo, muy sugestiva e ilumina a Arquímedes con una luz de grandeza que condice con su gigantesca figura.

Esta obra ha sido publicada originalmente en Italia por Compagnia Edizioni Internazionali S.p.A. - Roma Milán
Director Responsable: Pasquale Buccomino
Director Editorial: Giorgio Savorelli
Redactores: Mirella Brini, Ido Martelli, Franco Ochetto, Andreina Rossi Monti

77. Arquímedes - La edad de Grecia
Este es el quinto fascículo del tomo La edad de Grecia.
La lámina de la tapa pertenece a la sección La edad de Grecia, del Atlas Iconográfico de la Historia Universal.

Ilustraciones del fascículo Nº 77:
Mairani: p. 115 (1); pp. 118-119 (1,2); pp. 126-127 (1,2); p. 131 (1).
Alinari: pp. 116-117 (1,2); p. 125 (1); p. 140 (1).

Traducción de Leticia Halperín Donghi

Centro Editor de América Latina S. A.
Piedras 83 - Buenos Aires
Hecho el depósito de ley
Impreso en la Argentina - Printed in Argentina
Se terminó de imprimir en los talleres gráficos de Sebastián de Amorrortu e Hijos S. A. - Luca 2223, Buenos Aires, en diciembre de 1969.

Arquímedes

Attilio Frajese

625-550 a.C.
Fechas aproximadas del nacimiento y de la muerte de Tales de Mileto, a quien se atribuye el conocimiento de los principios de la matemática egipcia y la introducción de los mismos en Grecia.

570-500 a.C.
Fechas presuntas de la vida de Pitágoras.

430-365 a.C.
Actúa Arquitas de Tarento, matemático que también se interesa por las aplicaciones técnicas de la ciencia.

370 a.C.
Eudoxo de Cnido formula la hipótesis de las esferas homocéntricas para explicar el movimiento de los planetas, formula la teoría de las proporciones y crea el método de exhaución.

300 a.C.
Euclides de Alejandría escribe los *Elementos*, el primer gran tratado de matemática teórica.

287 a.C.
Fecha probable del nacimiento de Arquímedes de Siracusa. Su padre fue el astrólogo Fidias.
Muerto Agátocles, desde hace dos años Siracusa es una república libre.

283 a.C.
Ptolomeo II Filadelfo comienza a reinar en Egipto. Alejandría llegó a ser durante su reinado el mayor centro cultural del Mediterráneo. Arquímedes se trasladó probablemente a esta ciudad en sus años juveniles para estudiar con los sucesores de Euclides y conoció allí a Conón de Samos, Eratóstenes (m. 194) y Dositeo, cuyos nombres recuerda en las dedicatorias de algunas de sus obras.

281 a.C.
Aristarco de Samos (m. 230) formula la hipótesis heliocéntrica.

278-276 a.C.
Siracusa está en guerra con Cartago. Pirro, rey del Epiro, se alía a Siracusa con la esperanza de constituir un estado unitario entre Sicilia e Italia meridional, pero no tiene éxito.

270 a.C.
Hierón de Siracusa que condujo a sus conciudadanos a una victoria contra los mamertinos, sitiados en Mesina, llega a ser rey de la ciudad con el nombre de Hierón II.

264-263 a.C.
Alianza entre Siracusa y Cartago contra Mesina aliada con Roma: los romanos tienen la mejor parte y Siracusa pasa a su lado. Comienza la primera guerra púnica (hasta el 241).

255 a.C.
Prosigue la guerra con variadas vicisitudes, por tierra (sobre todo en Sicilia) y por mar. Este año Asdrúbal, el cartaginés, desembarca en Sicilia y ocupa Panormo (hoy Palermo).
En Sicilia, que romanos y cartagineses se disputaban, Arquímedes —que ha vuelto a su patria— escribe sus obras principales (*De la esfera y del cilindro, De la medida del círculo, De los conoides y los esferoides, De las espirales, Del equilibrio de los planos, El arenario, Cuadratura de la parábola, De los cuerpos flotantes, El método* son las que han llegado hasta nosotros). En cuanto a las aplicaciones prácticas en las cuales se lo recuerda también como un maestro, se citan: el tornillo que lleva su nombre y que sirve para elevar el nivel de agua para el riego; un *planetario* para la representación del movimiento de los astros que habría construido él mismo, además de algunos dispositivos con fines militares que se hicieron famosos por su aplicación durante la resistencia que Siracusa ofreció a los romanos.

250 a.C.
Victoria romana en Panormo. Tratativas de paz en Cartago.

249 a.C.
Amílcar Barca, el cartaginés, desembarca en Sicilia y obtiene allí victorias decisivas.

241 a.C.
Derrota de los cartagineses en las islas Egates. Paz entre Roma y Cartago. Sicilia es convertida en provincia romana: el aliado Hierón de Siracusa está bajo la protección de Roma.

219 a.C.
Estalla la segunda guerra púnica. Aníbal baja hasta Italia (218). Asdrúbal recorre España.

216 a.C.
Aníbal derrota a los romanos en Cannas y obtiene la alianza de Filipo de Macedonia y de Siracusa.

215-214 a.C.
Victoria del cónsul M. Claudio Marcelo contra los cartagineses en Italia meridional, mientras en Grecia, Filipo también sufre duras derrotas. Aníbal se retira.

212 a.C.
Siracusa, aliada de Aníbal, es tomada y saqueada por los romanos encabezados por el cónsul M. Claudio Marcelo.
Arquímedes muere a manos de un soldado romano, durante la ocupación, después del sitio durante el cual se aplican muchas de sus invenciones a la defensa de la ciudad. Con Arquímedes la matemática antigua alcanza su altura máxima, altura que no se superará en los quince siglos siguientes.

La posición de Arquímedes en el desarrollo de la matemática griega

Arquímedes, el más grande matemático de la civilización griega y uno de los mayores de todos los tiempos, vivió en el siglo III a.C.: se sabe que fue muerto durante el saqueo de Siracusa (212 a.C.) a la edad, parece, de setenta y cinco años y que, por lo tanto, su fecha probable de nacimiento fue el 287 a.C.

Arquímedes es así sólo algunos años posterior a Euclides de Alejandría y, a su vez, precede en algunos años a Apolonio de Perga, el autor de los libros sobre las secciones cónicas (elipse, parábola, hipérbola).

Para comprender la posición que ocupa Arquímedes en el desarrollo de la matemática griega, es necesario conocer las fases previas del mismo.

Los *Elementos* de Euclides fueron compuestos según el consenso general en el 300 a.C. Es ésta una obra de conjunto, vasta exposición de la matemática elemental griega (geometría plana y del espació, aritmética, álgebra con ropajes de geometría) que desafió los siglos y que ha influido hasta hoy en casi todos los países, de modo muy notable en la enseñanza, en especial de la geometría.

La obra de Euclides presupone y utiliza la de sus predecesores y puede decirse así que representa el punto final del período de tres siglos que comienza en el 600 a.C., es decir, desde la introducción en Grecia de la geometría del Oriente por obra de Tales de Mileto, hasta los *Elementos* mismos de Euclides (300 a.C.).

Este período de tres siglos suele llamarse también pre-euclídeo y el desarrollo de la matemática que se verifica en el mismo se debe a algunos grandes matemáticos, precisamente los predecesores de Euclides.

Es necesario agregar que las matemáticas prehelénicas, fundamentalmente la egipcia y la que por comodidad se denomina asiriobabilónica, son todavía poco conocidas pues ni siquiera se han interpretado todos los documentos (papiros y tablillas) descubiertos, los que por otra parte constituyen sólo un porcentaje mínimo de los que todavía podrán descubrirse. De todos modos, de los estudios del máximo conocedor de la materia, Otto Neugebauer, se infiere en esencia que esta matemática consiste en una aritmética bastante desarrollada que hasta llega a desembocar en el álgebra y en una geometría "doncella de la aritmética", es decir, que sobre todo sirve de ocasión para efectuar cálculos: una geometría vinculada a la materia y cuya finalidad esencial la constituyen las reglas de medidas de longitudes, de áreas y de volúmenes.

Según el consenso general, Tales transportó esta geometría a Grecia y sin duda la hizo progresar. Pero, el verdadero progreso significativo fue realizado en la escuela pitagórica que surgió junto al Maestro, quien habría vivido entre los años 570 y 500 a.C. y dado fin así al primer siglo del período pre-euclídeo. La geometría griega recibió su verdadero impulso con el descubrimiento de las líneas inconmensurables (como el lado y la diagonal de cualquier cuadrado), descubrimiento que parece haberse realizado en la escuela pitagórica en una segunda fase de actividad (todavía en vida de Pitágoras o poco después de su muerte y, según otros, mucho después de ésta) y cuya consecuencia parece haber sido el liberar la geometría de toda concepción material mediante la introducción de los llamados entes geométricos racionales: puntos sin dimensiones, líneas sin longitud, superficies sin espesor.

¿Qué quiere decir que el lado y la diagonal del cuadrado son inconmensurables? Significa que no tienen un submúltiplo común; en otras palabras, que no existe un segmento por más pequeño que sea, que esté contenido exactamente un número entero de veces en el lado y otro número entero de veces en la diagonal de un cuadrado cualquiera.

Ahora bien, si las líneas estuviesen compuestas por puntos que tienen longitud (el punto-mónada, esto es, el punto unidad de los primitivos pitagóricos) este punto-pequeño segmento debería estar contenido un número exacto de veces en el lado y en la diagonal de un mismo cuadrado. El lado y la diagonal serían, por lo tanto, conmensurables: más aún, de ese modo no existirían líneas inconmensurables.

El descubrimiento de las líneas inconmensurables es un producto del razonamiento y va más allá de toda posibilidad de verificación sensible. Encontramos el eco, un rastro valedero, en el diálogo platónico, el Menon, en el célebre trozo acerca de la lección de geometría que Sócrates desarrolla en colaboración con el muchacho ignorante. Como ya se ha dicho, este descubrimiento fundamental condujo por decirlo así a la aniquilación del punto, o sea, a su idealización que, por otra parte, estaba de acuerdo con la tendencia idealizadora del espíritu griego.

Con la introducción de tales entes geométricos (punto sin dimensiones, etc.), se inicia la verdadera geometría de precisión, o sea, que la geometría adquiere ese grado de precisión que habrá de mantener después a través de los siglos.

Poco a poco, la geometría en los siglos V y IV antes de Cristo va elaborando esa concepción que el gran matemático e historiador P. G. Zeuthen (1839-1920) llamó el "sistema de los Elementos". Es decir, se ordenaron las proposiciones geométricas según un concepto de dependencia y de derivación remontándose desde proposiciones complejas que ya se conocían de un modo esencialmente intuitivo-experimental, a proposiciones muy simples que no dependían de otras. Por ejemplo, una de estas "proposiciones primitivas" (o "postulados") fue: "Es posible trazar *la* recta que une dos puntos".

A esta tarea llamada de "análisis" le sucedió el proceso inverso, llamado "síntesis", es decir, la exposición de las proposiciones geométricas realizada partiendo de las simplísimas proposiciones primitivas y que llega por deducciones, a través de proposiciones intermedias, hasta las más complejas, por ejemplo, el llamado teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo.

Euclides: nace el "tratado" matemático

De este modo se opera en el "tratado" sobre el modelo de los *Elementos* de Euclides en el cual, comenzando precisamente por los "elementos" más simples, se llega hasta las propiedades más complejas; a aquellos teoremas que resultan "demostrados" al poder ser deducidos (eventualmente utilizando teoremas intermedios) de las proposiciones primitivas, es decir, de los postulados.

Antes de Euclides, escribieron "Elementos" (es decir, tratados cada vez más sistemáticos), los matemáticos Hipócrates de Quíos (contemporáneo de Sócrates), Teudio (contemporáneo de Aristóteles) y quizá también Demócrito de Abdera, quien además de filósofo fue muy grande matemático y de quien nos volveremos a ocupar a propósito de una importantísima obra de Arquímedes.

Pero ya podemos adelantar que Demócrito afrontó los problemas del infinito matemático que se presentan cuando se desea comparar entre sí figuras que no son todas poligonales, por ejemplo, cuando se consideran un círculo y un cuadrado que tienen la misma área. En geometría del espacio, los problemas del infinito se presentan al comparar pirámides que tienen el mismo volumen.

Eudoxo de Cnido, por medio del método que posteriormente se denominó de "exhaución", sistematizó rigurosamente, sujetándolos en esquemas fijos, los procedimientos que se refieren al infinito matemático. Su método fue usado luego por Euclides y también por Arquímedes.

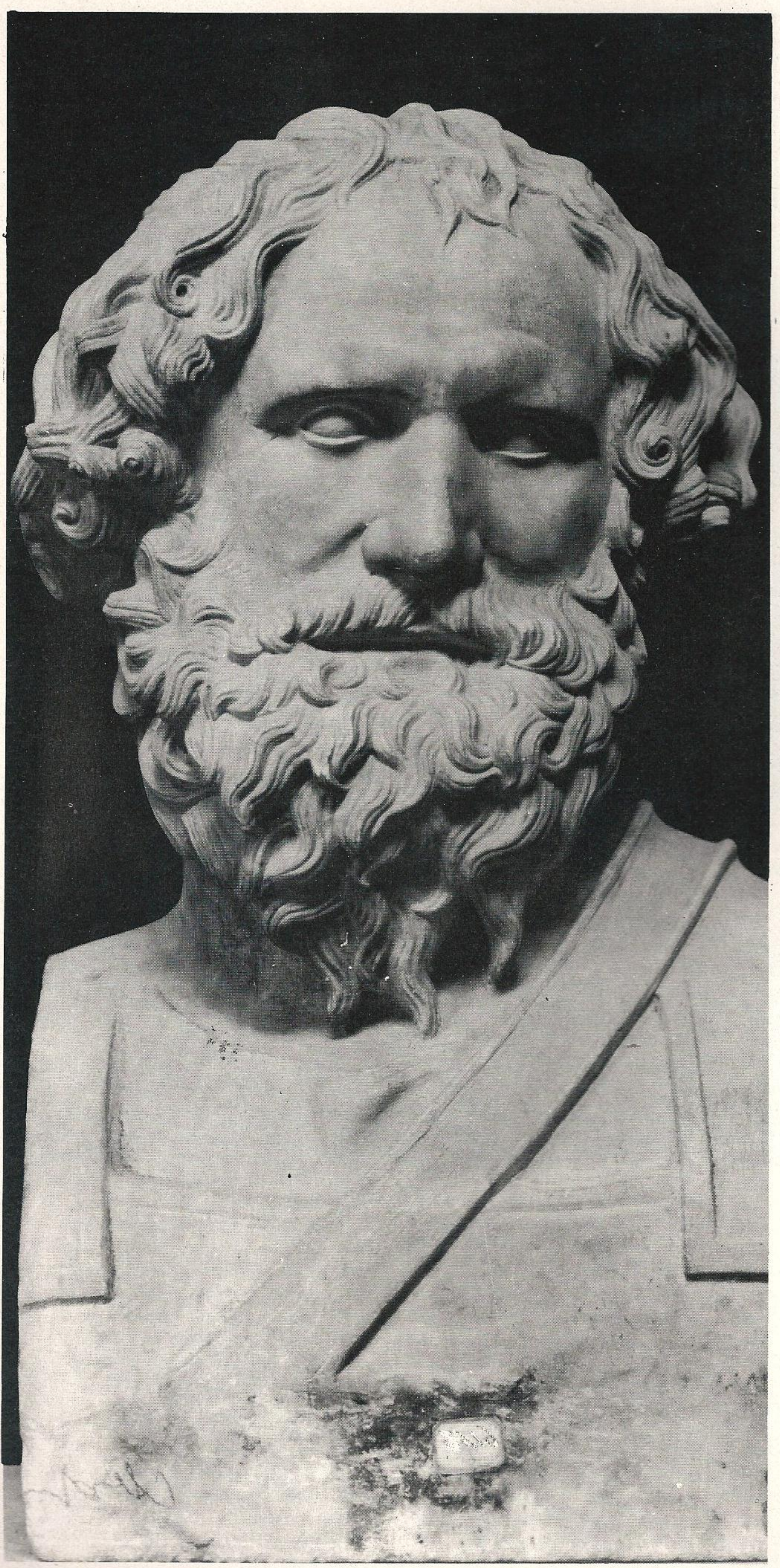
Euclides sufre la influencia de la filosofía de Platón o, por lo menos de la dirección que Platón establece o auspicia para la matemática: el alejamiento absoluto de las aplicaciones prácticas, el enfoque teórico total. Por ejemplo, en los *Elementos* euclídeos no se da la más mínima regla práctica de medida (ni siquiera la que permite calcular el área del rectángulo) aun cuando se encuentren allí los principales supuestos teóricos.

Para subrayar la actitud antipráctica de Euclides, bastará recordar una anécdota que sobre él nos ha llegado, anécdota que aunque probablemente no es verdadera, está bien hallada porque corresponde exactamente al carácter de la obra de Euclides. Después de una lección, un discípulo le



1

1. Siracusa: el castillo Eurialo erigido por Dionisio el antiguo en 402-397 a. C.: las torres (Mairani).



1

habría preguntado: "Maestro, ¿para qué sirve la geometría?" y Euclides habría ordenado a un sirviente que expulsase al desdichado y le diera además una moneda ya que quería sacar provecho de la ciencia.

Fusión de teoría y práctica

Con Arquímedes, el escenario cambia por completo. Este eximio matemático, aunque trata de un modo admirable las cuestiones de la matemática teórica más pura, no desdeña de ningún modo las aplicaciones prácticas, desde las reglas de medida y los cálculos aritméticos numéricos hasta el estudio de la mecánica (en particular, de la estática), la fundación de la hidrostática, tan admirada por Galileo, y la construcción de máquinas (a partir de las aplicaciones de la palanca).

También puede decirse que Arquímedes no sólo fue el más grande matemático de la antigüedad, sino además el mayor ingeniero, ingeniero en el sentido más amplio, es decir, no sólo en el sentido de quien *aplica* la teoría a la práctica, sino el de aquel que construye la teoría. Es decir, Arquímedes alcanza el equilibrio característico del espíritu griego: como matemático puede sobrepasar a Euclides en lo que respecta a rigor lógico y limpieza de concepciones, pero al mismo tiempo permanece unido a la vida de todos los días con sus exigencias prácticas ordinarias y extraordinarias. Encontramos que en su obra se cumple muy bien la imagen del gran matemático alemán Félix Klein (1849-1925), para quien la matemática pura podría compararse a un poderoso y perfecto esqueleto óseo en torno del cual la *carne* está constituida por las aplicaciones de la matemática misma: en la obra de Arquímedes se encuentra el organismo vivo completo.

La vida de Arquímedes

Parece que un tal Heráclides, quizás contemporáneo de Arquímedes, escribió sobre él una biografía que no ha llegado hasta nosotros. Afortunadamente, muchos escritores, aunque tardíos, nos brindan noticias sobre la vida del gran matemático siracusano: noticias que se centran en general sobre su actividad práctica durante el sitio de Siracusa y sobre su muerte.

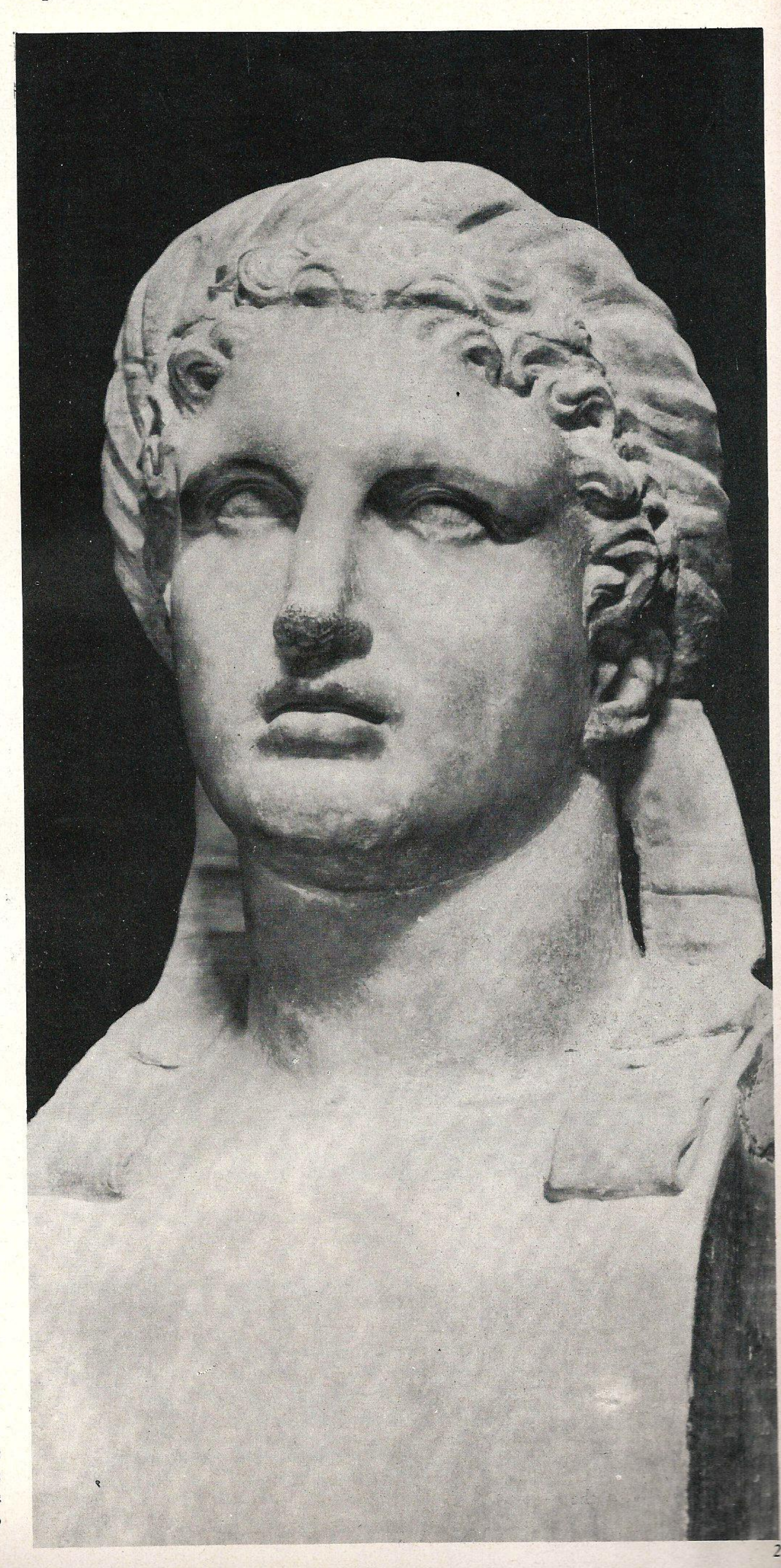
Puede comenzarse con el polígrafo tardío Tzetzes (siglo XII A.D.), quien afirmaba que Arquímedes habría muerto a la edad de setenta y cinco años durante la ocupación de Siracusa por los romanos luego del riguroso bloqueo. Probablemente en su juventud permaneció por algún tiempo en Alejandría, que en aquellos tiempos era la meta obligada de los hombres cultos. En efecto, esta ciudad era entonces el centro cultural del mundo helenístico al comienzo del período que precisamente fue denominado "alejandrino".

En Alejandría, pocos años antes del nacimiento de Arquímedes había florecido Euclides, el que suministró con sus inmor-

tales *Elementos* un tratamiento sistemático de la matemática elemental griega. Sin duda, Arquímedes habría tomado contacto con los discípulos o sucesores inmediatos de aquél y quizá podamos arriesgarnos a decir que en Alejandría él habría ampliado y afirmado la base de su formación matemática, base necesaria porque, aunque sea con una frase un poco temeraria podría decirse que la obra matemática de Arquímedes comienza justamente allí donde termina la obra matemática de Euclides y constituye casi una serie de capítulos de matemática "superior" fundada sobre la "matemática elemental" euclídea.

Evidentemente, después de regresar a Siracusa, Arquímedes se dedicó a sus investigaciones matemáticas, pero eso lo debemos deducir de las obras que nos han llegado, pues (excluida alguna noticia contenida en la introducción que Arquímedes incluyó en muchas de ellas) no poseemos ninguna o casi ninguna noticia biográfica sobre ese largo período, decisivo y fecundo de su vida.

También tenemos algunas noticias acerca de los inventos técnicos, si bien, salvo una excepción, no nos ha llegado ninguna obra sobre esto, obra que quizá tampoco habría sido escrita si prestamos fe a lo que al respecto dice Plutarco (*Vida de Marcelo*, 17). Según Plutarco, las invenciones mecánicas fueron consideradas por Arquímedes como una simple diversión y aun cuando le procuraron gran celebridad, él no las consideró dignas de ser transmitidas en sus escritos. Pero, no debe considerarse que esto contradice lo que antes se dijo acerca de la condición de "ingeniero" de Arquímedes: como ya se ha mencionado, en sus obras "escritas" se encuentran también aplicaciones de la matemática a la mecánica y a otras ramas de la técnica, pero aplicaciones encaradas siempre en actitud de científico, que no llegan hasta la construcción material de mecanismos mecánicos. Así, la anécdota sobre Arquímedes saliendo semidesnudo del baño y gritando "Eureka, eureka" (encontré, encontré), se refiere, es verdad, a un problema práctico (el de la composición de una corona en la cual se sospechaba que el oro hubiese sido mezclado a un metal vil), pero la resolución de dicho problema condujo quizás a resultados importantes en el campo de la hidrostática, quizás también a aquella proposición que lleva el nombre de *principio de Arquímedes* y que se refiere al "aligeramiento" de los cuerpos sólidos sumergidos en el agua (o en algún fluido). Algunos "inventos" fueron sin duda elegidos y usados para la defensa de la ciudad contra los romanos: por ejemplo, las máquinas para lanzar proyectiles contra las naves o directamente para levantar éstas del mar, además de los famosos "espejos ustorios" que habrían incendiado las naves a distancia (hecho, este último, muy poco o nada verosímil).





1. Siracusa: la oreja de Dionisio.
(Mairani).

2. Siracusa: Una parte de las murallas del castillo Eurialo (Mairani).

En las páginas anteriores:

1. Arquímedes. Nápoles. Museo Nacional (Alinari).

2. Hirión de Siracusa. Roma. Museo Capitolino (Alinari).



2

Plutarco (*Vida de Marcelo*, 17) nos habla, tal vez con alguna exageración, de los efectos que sobre la moral de los romanos tenían tales expedientes, efectos que habrían inducido a Marcelo a desistir de los asaltos directos a la ciudad de Siracusa y recurrir al bloqueo. En lo que respecta a la muerte de Arquímedes, casi todos los testimonios concuerdan en que ésta se produjo cuando el gran matemático estaba dedicado a resolver un problema de geometría. Por ejemplo, así nos lo dice Tito Livio (*Ab Urbe condita libri*, libro XXV, 31).

Vale la pena reproducir exactamente las palabras con que Tito Livio se refiere al tema y que se agregan a todas las referencias que había hecho en libros anteriores a la participación de Arquímedes y de sus inventos en la defensa de Siracusa. "Muchos fueron entonces los actos de violencia y de codicia y se cuenta que Arquímedes fue muerto por un soldado que no lo conocía cuando en medio de un inmenso tumulto, cual podía resultar del pánico suscitado por la furia de una soldadesca que se abandonaba al saqueo de la ciudad conquistada, estaba inclinado estudiando algunas figuras geométricas que había dibujado en el suelo. Y se dice que mucho disgustó esto a Marcelo, quien se hizo cargo de sus exequias y que además rindió honores y otorgó protección a los parientes a quienes había mandado buscar".

Como ya se ha visto, Plutarco agrega otros detalles y cita tres versiones poco diferentes una de la otra.

Otros autores citan la frase que comúnmente se atribuye a Arquímedes y que en su forma latina suena así: *"Noli turbare meos circulos"*.

Según parece, Arquímedes habría dispuesto también que sobre su tumba se grabase el dibujo de una esfera inscripta en un cilindro y así se hizo. Esta figura permitió a Cicerón localizar la tumba. Como se aclarará más adelante, a propósito de la obra *De la esfera y del cilindro*, se trataba de una alusión a uno de los puntos esenciales de la investigación geométrica de Arquímedes.

Las obras de Arquímedes

Existen muchos manuscritos que contienen obras de Arquímedes. Los principales de ellos hacen referencia a un manuscrito común más antiguo que se perdió.

En general puede decirse que la conservación de las obras de Arquímedes es satisfactoria y las que llegaron hasta nosotros son numerosas e importantes; en líneas generales, su texto se presenta bastante claro y fiel al original, aunque desde la antigüedad parecen haber sufrido una especie de transformación lingüística a causa del dialecto dórico en el que se cree escribió el autor.

Además de las obras que nos llegaron completas o casi completas, hubo otras que se perdieron ya en siglos remotos, pero de las cuales conocemos su existencia por intermedio de las citas de varios autores antiguos.

Una de éstas, *El método*, fue encontrada al principio de este siglo, en 1906, en un palimpsesto en Constantinopla por el gran filólogo danés I. L. Heiberg —autor de una magnífica edición de los *Elementos* de Euclides— quien vio premiados y coronados sus esfuerzos en forma tan afortunada por el inesperado descubrimiento. Y desde ya podemos adelantar que la obra sobre *El método*, aunque breve, es de la mayor importancia porque arroja viva luz sobre los caminos que siguió Arquímedes para llegar a sus admirables descubrimientos científicos.

El "Método"

El *Método* es una obra, por decirlo así, no oficial sino quizá destinada a un círculo restringido de amigos: se trata de una especie de explicación que se proporciona desde el escenario no ya al espectador común de la platea, sino a uno que tiene el privilegio especial de asistir a la representación entre bastidores y darse cuenta de todas las operaciones (casi diríamos, de todos los trucos) que se desarrollan en el escenario.

El hallazgo del *Método*, el más valioso que se haya realizado en nuestro siglo en el campo de la matemática griega, permite una comprensión del significado real, de la verdadera esencia de la obra de Arquímedes, muchísimo mayor que la que podríamos alcanzar a través del resto de sus escritos, por más importantes que éstos sean. Estas otras obras, que podríamos denominar *tradicionales*, nos ofrecen demostraciones indisputables en cuanto a rigor y precisión, pero no explican de qué modo llegó Arquímedes a los resultados cuya exactitud demuestra: de ahí el halo de brillo inaccesible que rodeó al gran matemático durante la Edad Media. Como ya veremos, al referirnos a *De la medida del círculo*, Leonardo Pisano llamado Fibonacci (comienzos del siglo XIII) fue el primero que, por lo menos en un caso particular, consideró perfectibles las obras de Arquímedes. Por otra parte, la obra sobre el *Método* no tiene efectivamente un carácter riguroso desde el punto de vista estrictamente matemático, lo que está de acuerdo con el momento creador fundamentalmente fluido e intuitivo que vive el científico en un primer período de la investigación y que, después de un cierto tiempo, es sucedido por la sistematización rigurosa de la teoría que se ha *adquirido* primero intuitivamente o aún experimentalmente. A veces, en el caso de teorías más complejas, transcurren decenios y aun siglos entre el momento de la búsqueda fluida y del descubrimiento semiintuitivo y el momento de la sistematización lógica rigurosa. Éste es, por ejemplo, el caso del cálculo infinitesimal oficialmente *inventado* casi contemporáneamente y bajo aspectos diversos por Leibniz y Newton y que debió esperar casi dos siglos para alcanzar una sistematización definitiva o casi definitiva.

A propósito de este *pasaje* del estado fluido de la búsqueda al *cristalizado* de la sistematización rigurosa, es necesario agregar que tal sistematización en lo que respecta a los problemas vinculados al infinito matemático, tuvo lugar en Grecia (como ya lo hemos señalado) hacia la mitad del siglo IV antes de Cristo, con Eudoxo de Cnido a quien se le debe la teoría de las proporciones y el llamado método de exhaución. Con ellos se establecía, en lo que respecta a áreas y volúmenes, un procedimiento uniforme y fatigoso que, sin embargo, no permitía *encontrar* resultados sino verificar la exactitud de los mismos una vez que se los conocía. Euclides aplicó el método de Eudoxo y lo mismo hizo Arquímedes en muchas de sus obras. Pero, al mismo tiempo, Arquímedes nos ofrece en su *Método* el panorama de una investigación fluida, no rigurosa, libre de prejuicios y sin estorbos de ningún género. De ese modo, en Arquímedes la investigación no es detenida y sofocada por el rigor de Eudoxo de Cnido sino que se explicita en forma libre y fecunda.

Puede establecerse un paralelo entre Arquímedes y Galileo en este orden de ideas en lo que respecta a la fundación del cálculo infinitesimal. En Arquímedes, como hemos de ver, se encuentran los preliminares de este cálculo y en lo concerniente a ese capítulo del cálculo infinitesimal que se conoce con la denominación de "calculo integral" bastante más que los preliminares. Y Galileo no sólo fue el gran físico, mecánico, astrónomo, técnico, literato que todos conocen: tuvo también brillantes intuiciones matemáticas que precisamente anticipan el cálculo infinitesimal (véase A. Frajese: *Galileo matematico*). En Galileo la matemática permanece en el estado fluido de la búsqueda, lejos de la sistematización lógica. Puede así comprenderse lo alejado que estuvo de una sistematización rigurosa del tipo de la de Eudoxo. Más aún, él critica ásperamente esta sistematización en lo que respecta a la teoría de las proporciones, que Euclides expone en el libro V de sus *Elementos*. Galileo formula esta crítica en un célebre párrafo (comienzo de la quinta jornada) de su última obra: *Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos nuevas ciencias*, e, instintivamente desvía su simpatía y su admiración desde Euclides-Eudoxo a Arquímedes, pues intuye admirablemente el carácter fluido y libre de prejuicios de las investigaciones de éste. Arquímedes es, por lo tanto, el matemático griego a quien con mayor razón puede equipararse con Galileo.

Retomando la visión de conjunto de las obras de Arquímedes, damos la lista de

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXcellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atq; à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncq; primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

Adiecta quoq; sunt

EVTOCII ASCALONITAE IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.

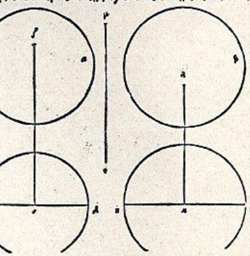
Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

1

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.



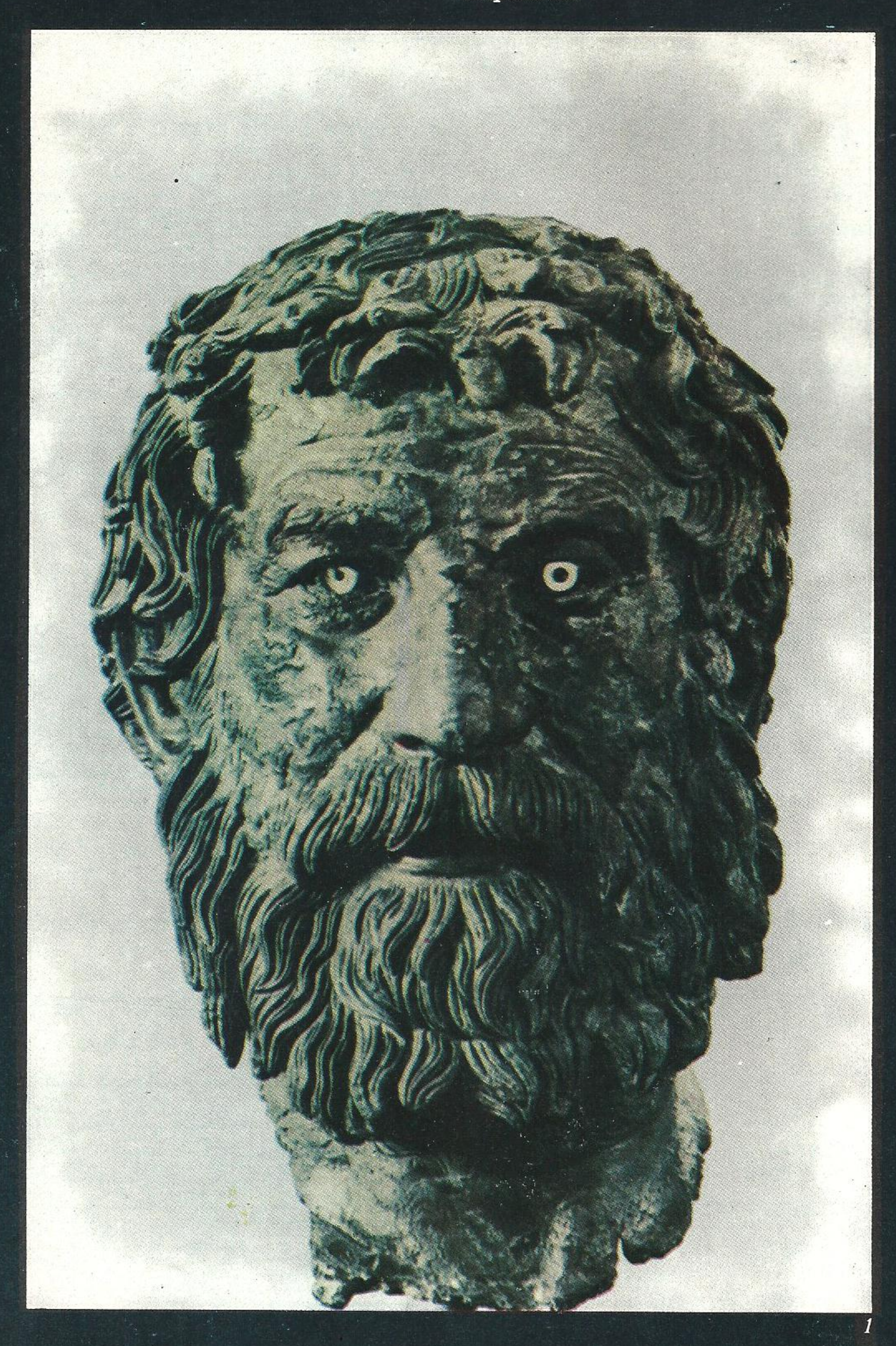
2

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

3

1. *Portada de la edición de las obras de Arquímedes con comentarios de Eutocio de Ascalón, Basilea, 1544.*

2, 3 De la esfera: *Dos páginas de la edición de Basilea del tratado de Arquímides.*



1

1. Cabeza de un filósofo, mediados del siglo III a. C., Atenas. Museo Arqueológico Nacional.

Posiblemente, Plutarco sea la mejor fuente de que disponemos por el conocimiento de la vida de Arquímedes y porque se hizo eco fiel de la resonancia de la fama del gran matemático. Creemos oportuno reproducir el texto mismo del autor de *Las vidas paralelas*.

"Marcelo comenzó a atacar a la ciudad a un mismo tiempo desde tierra y desde el mar. Apio dirigía el ataque de las fuerzas de tierra, el cónsul dirigía la flota constituída por unos sesenta quinquerremes equipada con todo tipo de armas de defensa y de ataque. Sobre una gran plataforma formada por ocho naves ligadas unas con otras había erigido una máquina de lanzamiento y remaba con ella en dirección de los muros confiado en el esplendor de su equipo y en la fama que lo circundaba.

"Pero, Arquímedes no se preocupó de esto, como si las armas del enemigo nada fuesen en comparación con sus mecanismos. No era que se hubiera dedicado a estos inventos como a una tarea digna de atención; en su mayoría eran diversiones de geometría que había hecho en sus ratos perdidos. El rey Hierón fue quien solicitó primero a Arquímedes y lo convenció que dirigiera algo del arte de sus conocimientos teóricos a las cosas concretas y mezclara de alguna manera la especulación con las necesidades materiales, para volverla más evidente a los profanos una vez que la hubiera hecho sensible . . .

"Arquímedes escribió un día al rey Hierón, de quien era pariente y amigo, que con una fuerza determinada se podía levantar un peso determinado. Dícese que lleno de entusiasmo por su propia demostración Arquímedes agregó que si hubiera existido otra Tierra habría movido ésta después de pasar a la otra. Hierón, maravillado por el descubrimiento hecho por su amigo, le rogó que llevase a la práctica su proposición mostrándole algún objeto pesado que se moviese por una fuerza pequeña. Arquímedes tomó un barco mercante de tres velas de la flota real que fue llevado a tierra con gran trabajo por muchos hombres, embarcó en éste muchas personas y su carga habitual, luego se sentó lejos y sin ningún esfuerzo lo hizo acercarse hacia él dulcemente y sin sobresaltos como si corriese sobre las ondas del mar. El rey quedó maravillado de la extraordinaria experiencia, intuyó las posibilidades de la ciencia de Arquímedes y lo convenció para que le preparara máquinas, sea de defensa, sea de ataque que pudiesen servir para cualquier tipo de asedio. Hierón no hizo uso de ellas porque casi toda su vida transcurrió sin guerras, en el esplendor de un reinado pacífico. Pero, ahora los mecanismos de Arquímedes, y junto con éstos su artífice, servían exactamente a las necesidades de los siracusanos.

"Los habitantes de Siracusa cuando vieron que los romanos atacaban la ciudad desde dos frentes (por tierra y por mar) quedaron anonadados y enmudecieron de terror. Pensaron que nada hubiera podido contrarrestar el ímpetu de un ataque realizado con fuerzas de tales proporciones. Pero, Arquímedes comenzó a cargar sus máquinas y a hacer llover sobre la infantería enemiga proyectiles de todo tipo. Grandes masas de piedras caían desde lo alto con fragor y velocidad increíbles y no habría modo de defenderse de sus golpes: arrojaban a tierra a quienes encontraban y rompían la formación. Al mismo tiempo largos maderos con punta se proyectaban hacia afuera de improviso desde los muros

se dirigían hacia las naves y golpeándolas por la proa con manos de hierro o picos semejantes a los de las grullas para luego sumergirlos en el agua por la popa. A otras naves se las hacía girar mediante máquinas accionadas desde el interior de la ciudad y se las arrastraba por aquí y por allá hasta que se rompían contra las rocas y los escollos colocados bajo los muros, con gran masacre de los hombres que estaban a bordo quienes sufrían el mismo fin que la nave. Muchas veces, una de éstas era levantada del agua, suspendida en el aire y luego estrellada totalmente. Constituía un espectáculo terrorífico: los marineros eran despedidos y proyectados en todas direcciones, el navío vacío golpeaba tarde o temprano contra los muros, o bien se aflojaba la presa y el navío resbalaba hacia el mar. En cuanto a la máquina que Marcelo llevaba en su plataforma, que se denominaba sambuca por una cierta semejanza con el instrumento musical homónimo, cuando todavía estaba lejos fue alcanzada por una piedra de diez talentos mientras la acercaban a los muros. Después de la primera, la alcanzó una segunda y luego una tercera piedra: algunos proyectiles se abatieron con gran ruido sobre el basamento de la máquina, la hicieron tambalear y la destrozaron totalmente; el pontón y la plataforma fueron destruídas.

"Marcelo, no sabiendo qué hacer, se replegó a toda velocidad con su flota y dio a las fuerzas de tierra orden de retirarse.

"Después se realizó un consejo de guerra en el cual se decidió intentar alcanzar los muros antes del día. Se adoptó tal decisión pensando que como las máquinas que usaba Arquímedes eran muy fuertes, habrían arrojado los proyectiles por sobre las cabezas y, de cerca, habrían sido totalmente ineficaces por no disponer de la distancia necesaria para el lanzamiento. Pero, parece que Arquímedes había preparado desde mucho tiempo atrás, ciertos instrumentos que permitían arrojar los proyectiles a cualquier distancia y estaban provistos de municiones para tiros cortos. Practicadas luego en las murallas troneras pequeñas, pero numerosas y próximas, había hecho colocar allí escorpiones de tiro corto que, sin ser vistos por los enemigos, habrían permitido alcanzarlos de cerca.

"Los romanos se acercaron al muro creyéndose no observados. En cambio, fueron acogidos de nuevo con una lluvia de golpes y de proyectiles: las piedras caían casi perpendicularmente sobre sus cabezas, de las murallas partían dardos en todas direcciones. Se vieron obligados a replegarse. Pero, aún cuando ya se encontraban lejos y estaban reordenándose, los proyectiles silbaban y continuaban alcanzándoles durante toda la retirada. Las pérdidas humanas fueron elevadas y muchas naves fueron arrojadas una contra la otra sin que pudieran responder adecuadamente al ataque, puesto que Arquímedes había colocado la mayor parte de sus mecanismos al abrigo de las murallas. Los romanos parecían combatir contra algún dios que los atacara de mil maneras desde lo alto sin ser visto por nadie . . .

"Los romanos estaban tan aterrados que apenas divisaban un cabestro o una madera asomando un poco sobre los muros gritaban: "Arquímedes está dirigiendo alguno de sus mecanismos contra nosotros" y emprendían una loca fuga. Marcelo en vista de esto, desistió de toda operación militar, combate o asalto y confió al tiempo el éxito del bloqueo.

"Arquímedes poseía un espíritu tan elevado, un alma tan profunda y un tesoro tan grande de conocimientos científicos que no quiso dejar nada por escrito acerca de estas cuestiones, a las que, sin embargo, era deudor de un nombre y de una fama de inteligencia no humana sino casi divina. Persuadido que la actividad de quien construye máquinas, lo mismo que la de cualquier otro arte dirigido a una utilidad inmediata, es innoble y grosera, dirigió sus miras más ambiciosas solamente a estudios cuya belleza y abstracción no estaban contaminados por exigencias de orden material. Y sus estudios no admiten parangón con ningún otro. En ellos hay una puja continua entre la materia y las demostraciones: la primera proporciona temas grandes y nobles y las segundas son de una precisión y de una fuerza extraordinarias. Es imposible encontrar en toda la geometría argumentos más difíciles y profundos que los que encara Arquímedes, ni argumentos expresados en términos más simples y puros. Algunos estudiosos atribuyen este portento a las dotes congénitas de su autor, en cambio, otros consideran que el hecho que todos sus principios parezcan alcanzarse sin ningún trabajo ni dificultad se debe a la extraordinaria elaboración con la cual se los obtuvo. Por cuanto, por más esfuerzos que se hagan, es imposible llegar solo a las demostraciones que él da y, sin embargo, apenas se las aprenda de él, se tiene la sensación que también se hubiera podido llegar a encontrarlas sin ayuda, por ser tan liso y rápido el camino por el cual él conduce a lo que quería demostrar. Por lo tanto, no hay razón para no dar crédito a cuanto se nos dice de Arquímedes o sea, que vivía todo el tiempo encantado por lo que podríamos llamar su sirena familiar y doméstica hasta el punto de olvidarse casi de comer y de cuidar su propio cuerpo. A menudo, cuando los sirvientes le arrastraban a viva fuerza al baño para lavarlo y ponerle ungüentos, dibujaba en las cenizas del hogar alguna figura geométrica y apenas lo habían untado de aceites trazaba con el dedo líneas sobre sus propios miembros y era verdaderamente prisionero de las Musas tanto lo dominaba el placer que en estas ocupaciones hallaba. Muchos y admirables fueron los descubrimientos que él hizo, pero dícese que rogó a sus amigos y parientes que, después de muerto colocasen sobre su tumba un cilindro con una esfera adentro y como inscripción la proporción del exceso del sólido continente respecto al contenido . . .

"Entretanto pasaba el tiempo. Un día Marcelo apresó a un tal Damipo, espartano que intentaba zarpar de Siracusa. Los siracusanos pidieron la devolución del prisionero y se declararon dispuestos a pagar un rescate . . . Durante las tratativas, se acercó varias veces a una torre, estimó con precisión la altura e hizo preparar escaleras adecuadas. Luego esperó que los siracusanos celebrasen una fiesta en honor de Arquímedes y mientras estaban dedicados al vino y los placeres ocupó, sin que nadie lo supiese, no solamente la torre, sino que antes que fuese de día, llenó también de gente armada el muro circundante y abrió una brecha . . .

"Marcelo descendió a la ciudad pasando por los Hexápiles, hecho señalado por las congratulaciones de sus oficiales. Pero, se cuenta que al mirar él la ciudad que se extendía bajo sus pie y considerando qué grande y hermosa era, entristecido por lo que ocurriría en breve tiempo, lloró largamente; intuyó cómo su aspecto elegante habría pronto al ser saqueada por el ejército . . . Pero, Marcelo estaba sobre todo dolorido por la desventura que tocó en suerte a Arquímedes. Por una desgraciada circunstancia el científico se encontraba solo en su casa y estaba considerando una figura geométrica y concentrado en ella de tal modo con la mente y con los ojos que no se dio cuenta que los romanos invadían y conquistaban la ciudad. De repente, entró en la habitación un soldado y le ordenó que lo acompañase a ver a Marcelo. Arquímedes respondió que iría después de haber resuelto el problema y puesto en orden la demostración. El soldado se enojó, desenvainó la espada y lo mató.

"Otros historiadores narran el hecho de modo diferente. Dicen que el romano se presentó ya con la espada desnuda, listo para matarlo y que Arquímedes apenas lo vio, le rogó esperar un instante para no dejar incompleto y sin demostración lo que estaba buscando, pero el soldado le dio fin sin tantas consideraciones.

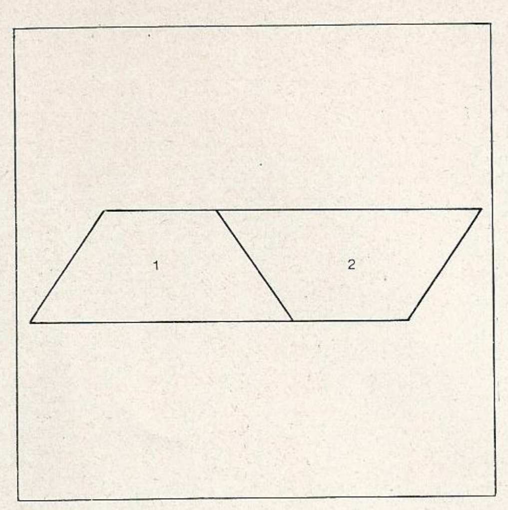
"Según una tercera versión algunos soldados encontraron a Arquímedes por el camino cuando estaba llevando a Marcelo un instrumento científico suyo compuesto de meridianos, esferas y cuadrantes, por medio del cual se medía a simple vista el tamaño del sol dentro de una casa. Los soldados pensaron que llevaba consigo oro y lo mataron.

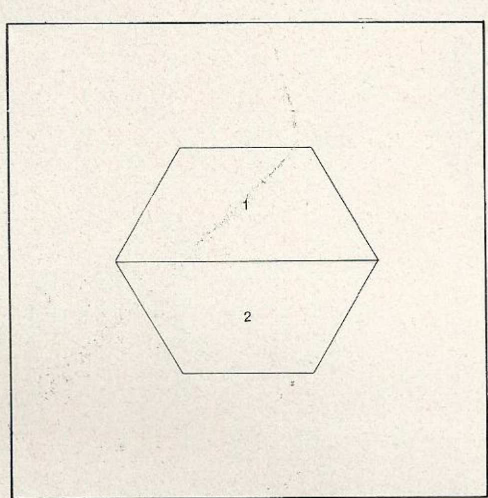
"Todos los historiadores están de acuerdo, sin embargo, en decir que Marcelo quedó muy dolorido por esta muerte y retiró la mirada del matador como si fuese un contaminado cuando se presentó ante él. Una vez que encontró a los parientes de Arquímedes, les rindió honores."

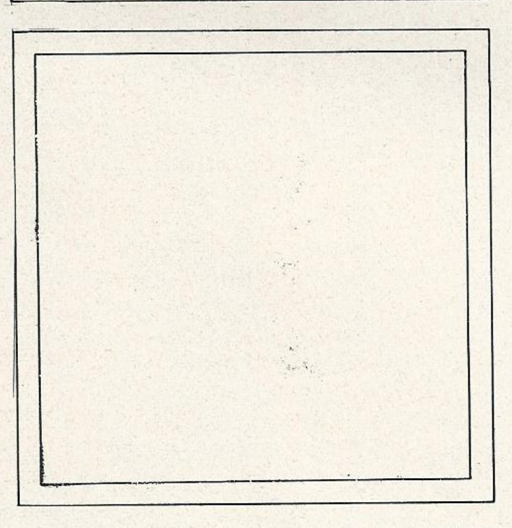
aquellas que han llegado hasta nosotros: Éstas son: 1) *De la esfera y del cilindro*, dos libros. 2) *De la medida del círculo*. 3) *De los conoides y de los esferoides*. 4) *De las espirales*. 5) *Del equilibrio de los planos*. 6) *El Arenario*. 7) *Cuadratura de la parábola*. 8) *De los cuerpos flotantes*. 9) El *Método*.
Éste es el orden según el cual se presentan comúnmente las obras en los manuscritos (excepto las dos últimas), pero no es el orden cronológico en el que fueron redactadas. Pero esta última cuestión escapa aquí a nuestro interés.
Daremos ahora algunas indicaciones acerca de las principales obras de Arquímedes, pero sobre todo nos detendremos lo más posible en algún punto de la obra fácilmente comprensible para los no matemáticos que a nuestro entender sea esencial para captar el espíritu de los trabajos del gran siracusano.

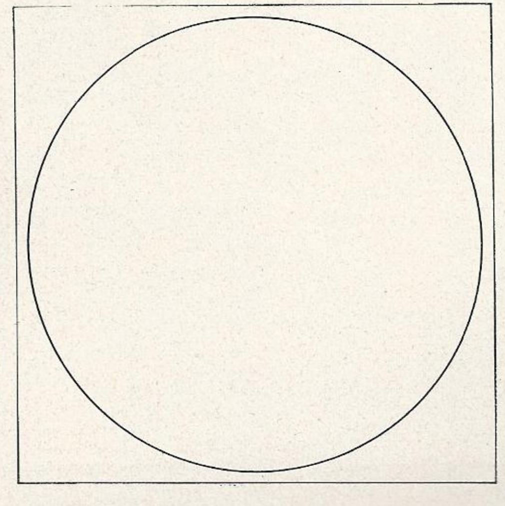
De la esfera y del cilindro

En *De la esfera y del cilindro*, así como en otras de sus obras, se ocupa Arquímedes de la determinación de áreas y volúmenes. A primera vista pareciera que se tratase de problemas prácticos que no están vinculados a complejas teorías de matemática pura. A este respecto puede recordar el lector que Euclides, en sus *Elementos*, evita con cuidado problemas de ese tipo. Sin embargo, debe señalarse que él expuso los presupuestos teóricos de algunas determinaciones de áreas y volúmenes y sólo evitó la aplicación práctica.
Arquímedes retoma los resultados a que llega Euclides y los extiende a otras figuras planas y sólidas. Se trata de problemas que implican el uso del infinito matemático y que, por lo tanto, presentan todas las dificultades inherentes a este uso. También en Euclides algunos problemas implican el infinito, pero en las figuras que Arquímedes estudia, las dificultades son mayores a causa de la naturaleza de las figuras mismas.
Examinemos por un instante varios tipos de figuras geométricas comenzando por las planas más simples, es decir, los polígonos. En éstos no se presenta ninguna dificultad y para la determinación de sus perímetros y de sus áreas no es necesario recurrir al infinito. En lo que respecta a los perímetros, se trata simplemente de adicionar segmentos de recta, y en lo que respecta a las áreas, obsérvese que siempre es posible poner en evidencia la equivalencia (es decir, la igualdad de áreas) mediante la llamada *equicomposición*. Es decir, siempre es posible *componer* dos polígonos equivalentes con los mismos pedazos, es decir, disponiendo de modos diferentes partes *finitas* en número *finito*.
Así el paralelogramo y el hexágono dibujados son equivalentes y se componen de dos trapecios (iguales dos a dos) dispuestos en diferente forma.

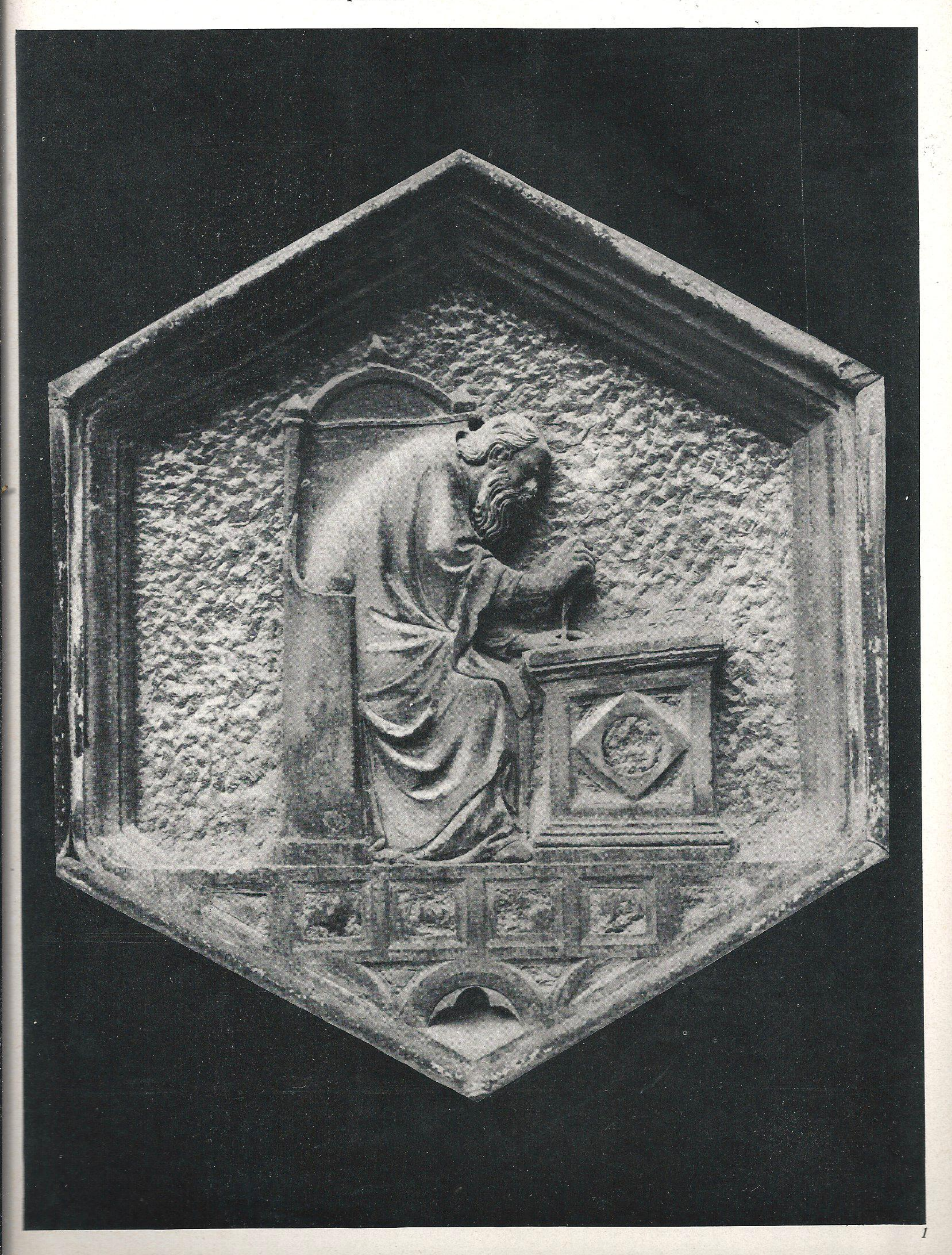








1. *Euclides o la geometría: relieve de Giotto y Andrea Pisano, del campanilo de la Catedral de Florencia.*
(Alinari).

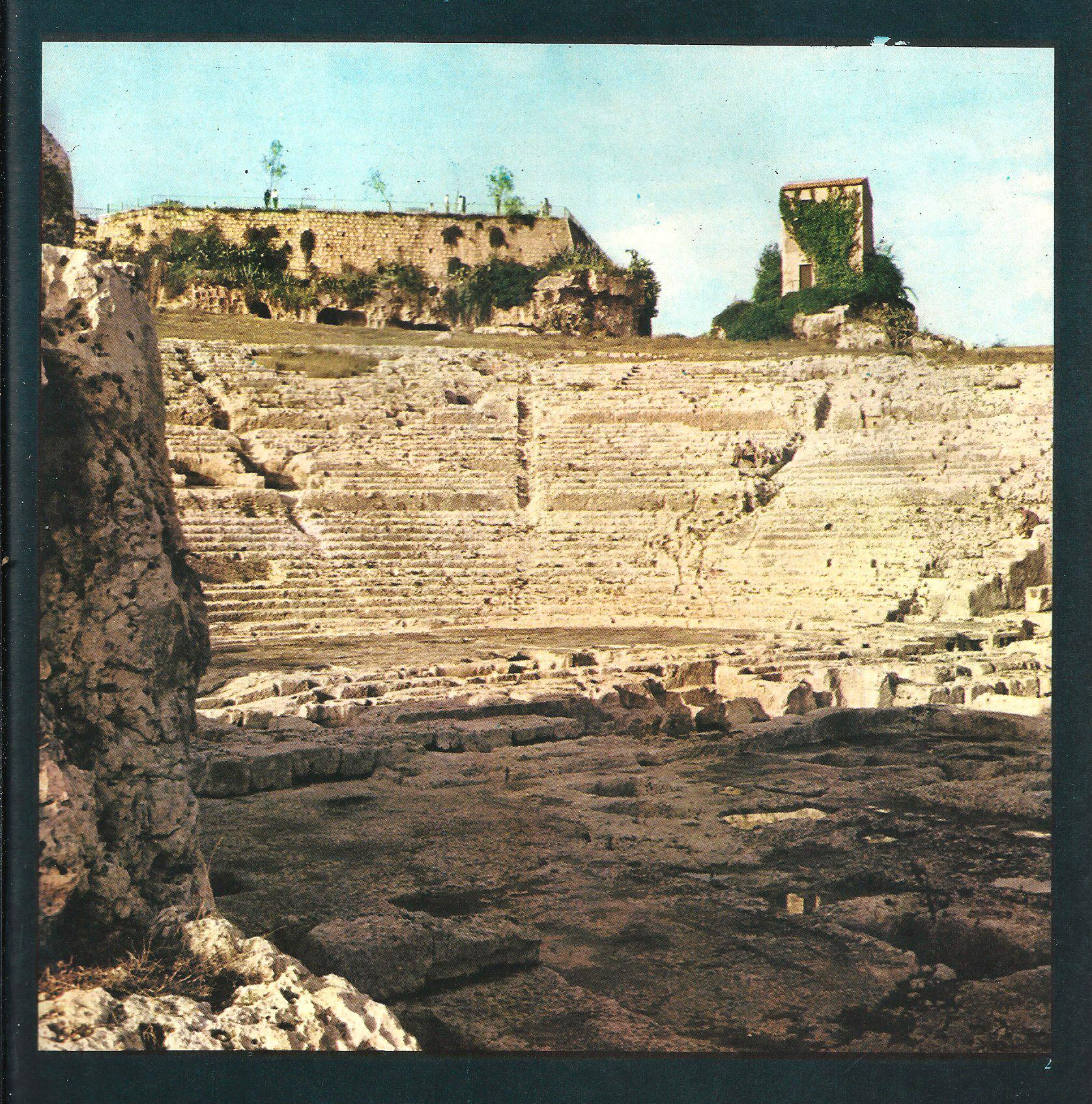




1

1. Siracusa: el teatro griego (Mairani).

2. Siracusa: Las gradas del teatro vistas desde el escenario (Mairani).

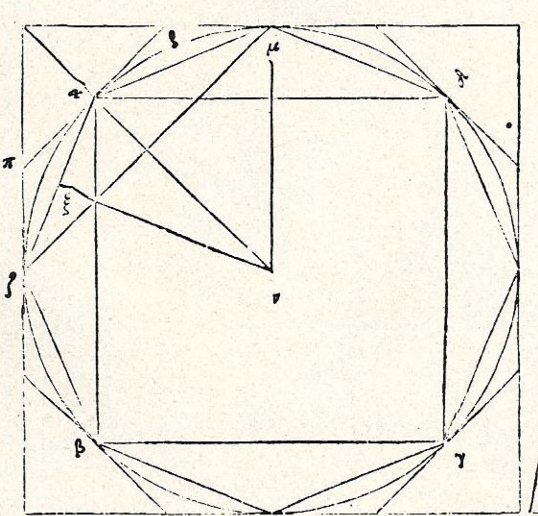


2

αργ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. μείζων οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γαρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξκα. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξκα, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μκγ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γαρ, τοῦ ὑπὸ τῶν μκγ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γα πρὸς τὴν κγ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς τὴν γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζθ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἢ ἡ μκ πρὸς τὴν μλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν βδ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν.

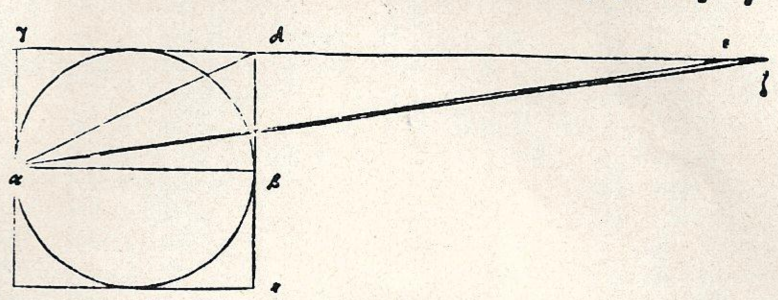
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ αβγδ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ αγ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ νξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ νξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ οαρ. ἡ ορ ἄρα τῆς μρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρμ τῇ ρα ἴση ἐστί. καὶ τὸ ροπ τρίγωνον ἄρα τοῦ οζαμ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ πζα τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ αβγδ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν να ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.



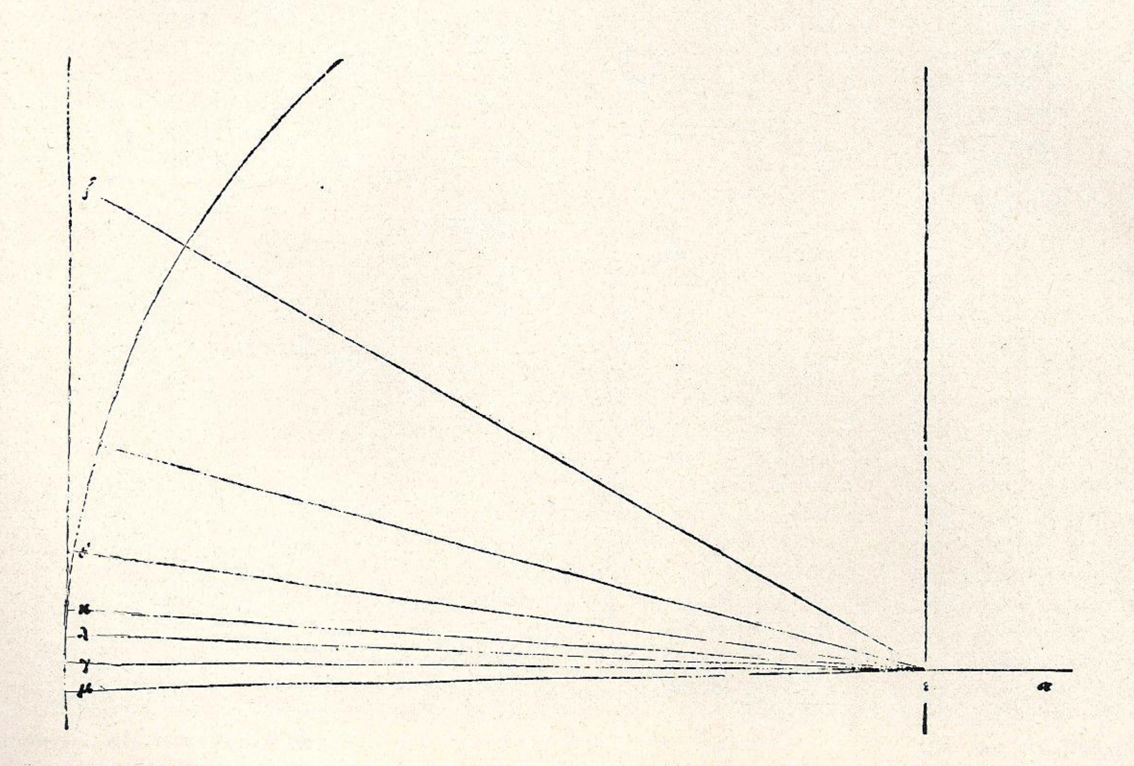
β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ αβ.

αβ. καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ γη. καὶ τῆς γδ διπλῆ, ἡ δε. ἕβδομον δὲ ἡ εζ τῆς γδ. ἐπεὶ οὖν τὸ αγε πρὸς τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ αεζ τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ αγζ πρὸς τὸ αγδ ἐστίν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ αγδ τετραπλάσιόν ἐστι, τὸ γη τετράγωνον. τὸ δὲ αγζ τρίγωνον,



τῷ αβ κύκλῳ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ μὲν αγ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τῷ ζ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γη τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γλζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ἡ δὲ εγ πρὸς τὴν γζ λόγον ἔχει, ἢ ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ. καὶ ἐναλλὰξ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. ὥστε ἡ γε πρὸς γη μείζονα λό- γ

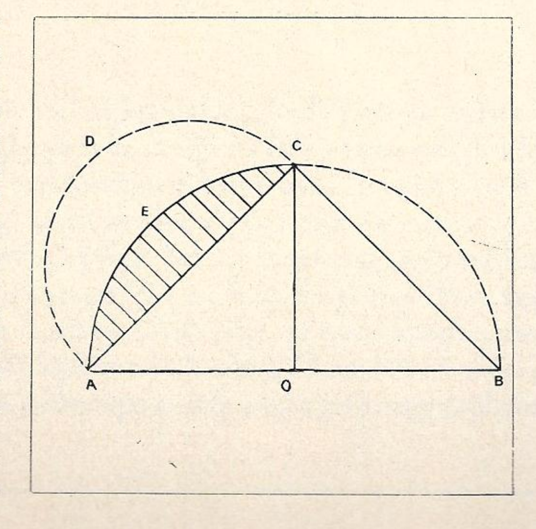


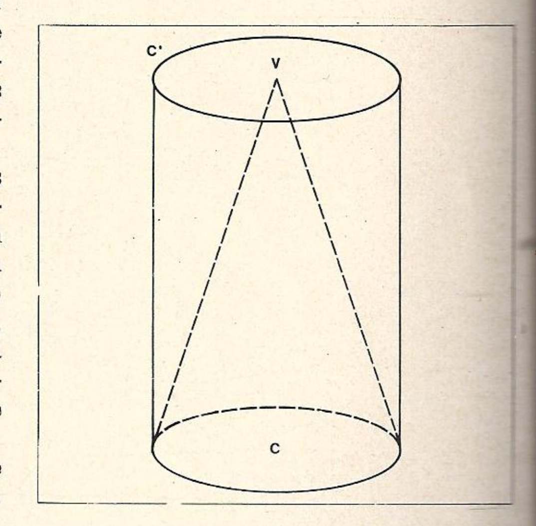
γον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει, λόγον ἔχει, ὃν ͵μ θυν πρὸς ͵μ, γυθ. μή- λ δ β
κει ἄρα ὃν φϙα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ εγ πρὸς γθ, μείζο- μ μ
να λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αρξβ η' πρὸς ρνγ. ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αροβ η' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ. ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵βτλδ δ' πρὸς ρνγ. ἡ εκ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵βτλθ δ' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ λε. ἡ εγ ἄρα πρὸς λγ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ < πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λεγ, ὀρθῆς ἐστι μη. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση. ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γεμ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ ὀρθῆς ἐστι κδ. καὶ ἡ λμ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστιν τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ ἐδείχθη μείζονα λό-

ζ 3 γον

Pero esta *equicomposición* simple sólo es posible en líneas generales para los polígonos. Si una sola de las dos figuras no es poligonal, ya no es posible evidenciar la equivalencia (igualdad de superficie) mediante la equicomposición.
Por ejemplo, se demostró que es imposible hacer esto si se comparan entre sí un círculo y un cuadrado equivalentes (Réthy). Se podría pensar erróneamente que *no existe* un cuadrado que tenga exactamente la misma área que el círculo. Sin embargo, siempre existe un cuadrado así como puede advertirse, aun intuitivamente, si se piensa en un cuadrado pequeñísimo (menor que un círculo dado) que se vaya agrandando poco a poco en forma continua. Al crecer, siempre llegará a ser mayor que el círculo dado. Se intuye entonces que en un cierto momento, el cuadrado habrá pasado, por decirlo así, por un tamaño igual al del círculo. La imposibilidad de resolver el problema de la cuadratura del círculo no reside ya en la *inexistencia* del cuadrado equivalente a un círculo cualquiera dado sino en la imposibilidad demostrada de *construir* dicho cuadrado usando solamente regla y compás. Pues bien, retornando al par de figuras planas (un círculo y un cuadrado equivalente al mismo), se ha demostrado que es imposible poner en evidencia su equivalencia mediante la equicomposición, es decir, que es imposible *descomponer* el cuadrado y el círculo en un número finito de partes iguales tomadas de dos a dos.
Para tratar estos problemas, los matemáticos han debido seguir necesariamente la senda del infinito y esto en base a una intuición del tipo siguiente: por más que se divida en partes una de las figuras, no se llega a componer con ésas la otra. Pues bien, la equicomposición será posible si pasamos al infinito, es decir, si descomponemos las dos figuras en un número "infinitamente" grande de partes "infinitamente" pequeñas iguales tomadas de dos a dos. Esta intuición está precisamente en la base del cálculo infinitesimal y veremos que Arquímedes se sirvió de ella, proporcionándonos por lo tanto una validísima introducción a dicho cálculo.
En cuanto a los cuerpos sólidos, las dificultades son aún mayores. Si se trata de dos prismas equivalentes, se los reduce a los polígonos de la base y resulta siempre posible descomponer los prismas mismos en un número finito de partes finitas iguales tomadas de dos a dos. Pero, apenas se abandonan los prismas para pasar a las pirámides, la dificultad se presenta en toda su esencia. Efectivamente, se ha demostrado (Max Dehn, 1902) que para dos tetraedros (es decir, para las pirámides más simples) que tienen iguales bases e iguales alturas, tampoco es posible evidenciar la equivalencia mediante la equicomposición. Por esta causa aún en las escuelas secundarias, cuando se trata de demostrar un teorema aparentemente tan simple como el que dice que dos pirámides que tienen iguales bases y alturas son equivalentes, debe recurrirse a un proceso de demostración muy complicado que pasa a través del infinito (*escaloides* inscriptos y circunscriptos en los cuales va aumentando infinitamente el número de "escaloncitos").
La matemática dominó, por decirlo así, la línea curva y la superficie curva precisamente por medio de los procedimientos del cálculo infinitesimal, los cuales descomponen un trozo de curva en infinitos trozos rectilíneos infinitamente cortos, y en forma análoga descomponen una superficie curva. Por ello, al llegar Arquímedes a determinar áreas y volúmenes que implican líneas o superficies curvas, inicia en esencia el cálculo infinitesimal por lo menos en lo relativo a algunos de sus procedimientos esenciales.

La "cuadratura del círculo"
Más de un siglo y medio antes de Arquímedes, los matemáticos griegos habían enfrentado ya el problema de la cuadratura de una superficie plana constituida total o parcialmente por líneas curvas. Cuadratura significa la construcción de un cuadrado equivalente (es decir, que tiene la misma área) a la figura considerada. Los matemáticos griegos se impusieron además la condición que tal construcción se realizara por intermedio del clásico uso de la regla y compás, es decir, exclusivamente por medio del trazado de rectas y circunferencias. Y, como ya lo indicamos, es imposible resolver el problema de la cuadratura del círculo así encarado.
El primero que se aventuró en problemas de cuadratura fue el matemático Hipócrates de Quio (que no debe confundirse con su homónimo Hipócrates de Cos, el gran médico y fisiólogo). Hipócrates de Quio fue contemporáneo de Sócrates, es decir, que vivió aproximadamente en la segunda mitad del siglo v a.C.; pudo cuadrar algunas de las partes del círculo (algunas de las llamadas *lúnulas*).
Damos, a título de ejemplo, la más simple de las cuadraturas de Hipócrates. Dados AB (un diámetro del círculo de centro O) y C (el extremo del radio trazado perpendicularmente a AB), únase C con A y B. Hipócrates demuestra que, como el cuadrado construido sobre el lado AB es doble del cuadrado construido sobre el lado AC (demostración clásica que se encuentra en el célebre pasaje del diálogo platónico *Menon*), también el círculo de diámetro AB es doble del círculo de diámetro AC (basándose esto en el teorema usado por él según el cual los círculos están entre sí como los cuadrados de los diámetros). Por lo tanto, también el semicírculo de diámetro AB es doble del semicírculo de diámetro AC (en la figura se han trazado los dos semicírculos) y, por lo tanto, también la mitad del semicírculo de diámetro AB (es decir, el *cuadrante* AOCE) resulta equivalente al semicírculo de diámetro AC. Pero, el cuadrante y el semicírculo tienen una parte común: el segmento circular AEC de base AC (rayado en la figura). Substrayendo tal parte común de ambas figuras equivalentes, resulta que el triángulo AOC es equivalente a la *lúnula* AECD, es decir, a aquella parte del semicírculo de diámetro AC comprendida entre la semicircunferencia ADC y el cuadrante AEC de la circunferencia mayor. He aquí pues que, de un modo verdaderamente genial, se ha encontrado que una figura como esta lúnula comprendida entre dos líneas





curvas (dos arcos de circunferencias distintas) es exactamente equivalente a una figura limitada por trazos rectilíneos, esto es, a un triángulo. Y puesto que se puede construir un cuadrado que tenga la misma área que el triángulo (usando, a la manera clásica, regla y compás), Hipócrates pudo construir un cuadrado equivalente a la lúnula considerada, es decir, ha llegado a cuadrar la lúnula. Arquímedes va más allá y, como ya veremos, llega a cuadrar por ejemplo también el segmento parabólico, es decir, la figura plana comprendida entre un arco de parábola y una línea recta. En su obra *De la esfera y del cilindro* se dedica a comparar los cuerpos sólidos. Como deducimos del contenido de



1

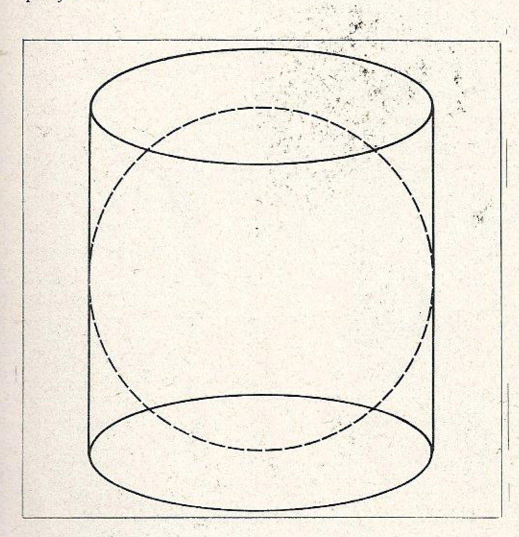
1. Cabeza de león de la torre del castillo Eurialo en Siracusa (Mairani).

En las páginas anteriores:

1, 2 Dos páginas de la primera edición impresa del texto griego de Arquímedes, Basilea, 1544.

los prefacios que el mismo Arquímedes incluyó en varias de sus obras, ya Demócrito de un modo no riguroso y más tarde Eudoxo de Cnido rigurosamente, habían resuelto los problemas concernientes a los volúmenes de la pirámide y del cono, cuerpos que resultan respectivamente iguales a la tercera parte del prisma y del cilindro que tienen igual base y altura. Estos notabilísimos resultados son referidos por Euclides.

Si se considera dentro de un cilindro de base circular C, un cono que tiene la misma base C y como vértice V el centro del cilindro de base "superior" C', la comparación entre el cilindro y el cono es muy difícil desde el punto de vista conceptual. Que el volumen del cono sea exactamente la tercera parte del volumen del cilindro es un hecho extremadamente simple que representa, sin embargo, la conclusión sorprendente de una investigación bien compleja.



Pero Arquímedes va más allá y se dedica a la determinación de la superficie y del volumen de la esfera que él compara a los valores correspondientes del cilindro circunscripto, o sea, de un cilindro que tiene una base igual al círculo máximo de la esfera y una altura igual al diámetro de la misma esfera. Utilizando el método de exhaución, Arquímedes demuestra que la superficie de la esfera es igual a cuatro veces la del círculo máximo, es decir, demuestra la proposición que nos conduce a la fórmula bien conocida:

$$S = 4 \pi r^2$$

Y Arquímedes observa además que la superficie de la esfera es exactamente igual a la superficie lateral del cilindro circunscripto, relación que nosotros, utilizando fórmulas actuales escribimos así:

$$S = 2 \pi r \,.\, 2 r = 4 \pi r^2$$

Si además, en lugar de considerar la superficie lateral del cilindro, se considera la superficie total (es decir, con el agregado de las superficies de las bases), dicha superficie total del cilindro circunscripto resulta igual a una vez y media la superficie de la esfera:

$$4 \pi r^2 + 2 \pi r^2 = 6 \pi r^2 = \frac{3}{2} \,.\, 4 \pi r^2$$

(según nuestros signos).

Arquímedes pasa después a los volúmenes y demuestra que el volumen del cilindro circunscripto es exactamente una vez y media (3/2) el volumen de la esfera y que, por lo tanto, este último es igual a 2/3 del volumen del cilindro circunscripto. Con nuestros símbolos:

$$V = \frac{2}{3} \pi r^2 \,.\, 2 r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Llegado a este punto, debemos observar que si ya las cuestiones concernientes a las medidas de las superficies planas limitadas, total o parcialmente por líneas curvas, presentan grandes dificultades, en líneas generales se presentan mucho mayores en las cuestiones del mismo tipo que se refieren a superficies del espacio que no son planas. Por lo tanto, se comprende fácilmente que Arquímedes valorase mucho estos resultados y quisiera (según se dice) que se grabase sobre su tumba la figura de una esfera y del cilindro circunscripto a la misma, voluntad que, según parece, Marcelo hizo cumplir. Debe señalarse además que con el método de exhaución Arquímedes demostró la exactitud de los admirables resultados encontrados por él. (El camino efectivo que siguió en la búsqueda, camino que revela una gran genialidad, será expuesto aunque sólo sea en forma parcial a propósito de su obra sobre el *Método*.)

En cuanto a la figura geométrica esculpida sobre la tumba de Arquímedes, se menciona un pasaje de Cicerón (*Tusculanae disputationes*, V, 23) y nos complace citar al respecto la paráfrasis y el comentario de Antonio Favaro, el ilustre cultor de historia de la ciencia: "Cicerón cuenta que en la época en que era cuestor en Sicilia, la curiosidad lo impulsó a buscar la tumba de Arquímedes y la descubrió tras las zarzas y espinos que la cubrían casi enteramente, a pesar de la ignorancia de los siracusanos quienes argumentaban que la búsqueda sería infructuosa pues no existía cerca de allí un monumento tal. Sin embargo, él recordaba algunos senarios que, según se le había dicho, estaban grabados sobre la tumba y en los que se mencionaba una figura esférica y un cilindro representados en ella, y encontrándose un día más allá de la puerta de Siracusa hacia Agrigento y observando cuidadosamente a su alrededor, vio entre gran número de tumbas una columna que sobrepasaba las zarzas que la circundaban y precisamente notó en ella la figura de una esfera y de un cilindro. Se dirigió entonces a las autoridades de la ciudad que estaban con él y les dijo que creía ver la tumba de Arquímedes y habiendo limpiado el lugar con las hoces y abierto el pasaje reconoció en seguida la inscripción, aunque la mitad de las líneas hubiese sido borrada por el tiempo."

Favaro concluye melancólicamente (y son las palabras finales de su muy apreciable obra): "Pero ni siquiera este descubrimiento sirvió para recomendar a los siracusanos el cuidado de la tumba de Arquímedes cuyo nombre se ha transmitido a la posteridad más lejana, no por intermedio de esas pocas piedras, sino por el monumento imperecedero que se erigió a sí mismo con sus obras inmortales."

En verdad, Arquímedes se enorgullece explícitamente (y tiene derecho a hacerlo) de su descubrimiento de la relación entre la esfera y el cilindro, en la introducción al primer libro de la obra *De la esfera y del cilindro*, pues escribe que las propiedades relativas eran "de acuerdo con la naturaleza" inherentes a las figuras geométricas consideradas, pero que habían permanecido ignoradas para aquellos que antes que él se habían dedicado al estudio de la geometría.

Y no es por azar que Galileo, colega ideal de Arquímedes, demuestre análoga complacencia por el descubrimiento de las leyes de la caída de los pesos. (Al comienzo de la tercera jornada de los *Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos nuevas ciencias*. Véase A. Frajese: *Galileo matemático*.)

Citamos de la obra en latín *De motu locali* compuesta por Galileo e incluida por el en los *Discursos*: "Damos comienzo a una ciencia novísima sobre un tema muy antiguo. Quizá no haya nada en la naturaleza más antiguo que el movimiento y de él se han ocupado los filósofos en volúmenes que no son ni escasos ni pequeños; sin embargo, encuentro que muchísimas propiedades del movimiento bien dignas de conocerse han pasado inadvertidas y no han sido demostradas... En efecto, que yo sepa, nadie ha demostrado que los espacios descriptos en tiempos iguales por un cuerpo móvil que cae a partir del estado de reposo, mantengan entre sí la misma relación que tienen entre sí los sucesivos números impares a partir de la unidad... Se observó que los cuerpos lanzados, o sea los proyectiles, describen una cierta curva, pero nadie ha demostrado que sea una parábola." Y al terminar esa misma jornada, el segundo interlocutor (Sagredo, VIII, 266) menciona precisamente a Arquímedes: "En verdad, me parece que se puede conceder a nuestro académico (Galileo) que haya podido sin jactancia al comienzo de éste, su tratado, atribuirse el habernos traído una nueva ciencia sobre un tema antiquísimo. Y al ver con cuánta facilidad y claridad deduce de un solo principio muy simple la demostración de tantas proposiciones, me causa gran maravilla que tal materia haya pasado intacta por Arquímedes, Apolonio, Euclides y tan-

tos otros matemáticos y filósofos ilustres y tanto más cuando se han escrito muchos y grandes volúmenes acerca del movimiento."

La obra sobre el *método* mecánico

Como se dijo anteriormente, la obra sobre el *Método* mecánico que ya estaba incluida en la lista de obras de Arquímedes juzgadas perdidas, fue encontrada fortuita y afortunadamente por Heiberg en 1906 bajo un palimpsesto que provenía de la biblioteca del Santo Sepulcro en Jerusalén. Se trata de una obra singular, inmensamente valiosa. Efectivamente, Arquímedes en sus otras obras clásicas demuestra la validez de sus importantes resultados, pero no se aclara en ellas qué senda había recorrido para llegar a los resultados mismos. A menudo se encuentran en sus obras tratamientos largos que conducen a las proposiciones finales importantes a través de caminos tortuosos; éstos no podían constituir por lo tanto las sendas del descubrimiento, sino que representaban sistematizaciones rigurosas de las teorías, sistematizaciones que se desarrollaban a partir, precisamente, del conocimiento preliminar de los resultados en cuestión.

El enigma se soluciona en el *Método*, porque en esta breve obra Arquímedes explica a sus amigos y colegas de Alejandría cómo llegaba él, de un modo no riguroso, a esos resultados que constituían a un mismo tiempo el punto de partida y el punto de llegada de sus clásicos tratamientos.

Arquímedes, en la introducción al *Método*, se dirige al matemático Erastóstenes a quien dedica la obra: *De Arquímedes a Eratóstenes: Método acerca de los teoremas mecánicos*, y dice:

"Sabiéndote, como ya te lo he dicho, estudioso y maestro excelente de filosofía y como sé que sabes apreciar, llegado el caso, las investigaciones matemáticas, he creído conveniente exponerte por escrito e ilustrarte en este libro la particularidad de un método, según el cual te será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, de que será útil también para demostrar los mismos teoremas. Yo mismo, algunas de las cosas que descubrí primero por vía mecánica, las demostré luego geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un cierto conocimiento de los problemas, dar luego la demostración que buscarla sin ningún conocimiento previo. Por esta razón, aun de los teoremas mismos referentes al cono y a la pirámide, que Eudoxo fue el primero en demostrar, a saber: que el cono es la tercera parte del cilindro, y la pirámide, la tercera parte del prisma, que tienen la misma base e igual altura, debe atribuirse un mérito no pequeño a Demócrito, que fue quien primero enunció, aunque sin demostrarla, esta propiedad de las mencionadas figuras. También a mí me ha ocurrido que el descubrimiento de los teoremas que ahora publico, lo hice de modo similar al de los anteriores."

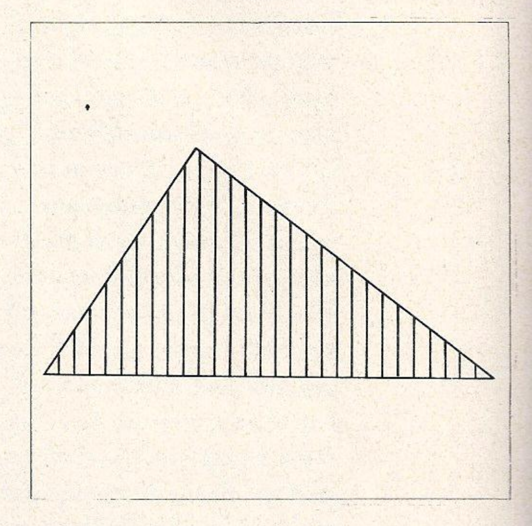
Pero, ¿en qué consiste este famoso "método mecánico" encontrado por Arquímedes, método que, si bien no responde a las exigencias del rigor (y por ello requiere una demostración geométrica aparte), permite, de todos modos, llegar a obtener resultados exactos?

Ante todo, deseamos disipar un posible equívoco. El lector podría pensar que la aplicación del método de Arquímedes tuviese un carácter puramente mecánico, automático, por decirlo así, y que, por lo tanto, una vez en posesión del conocimiento de tal método general, cualquier persona puede aplicarlo a casos diferentes, incluso muy complejos. La situación no es precisamente ésta: toda aplicación del método requiere genio, inventiva, recursos especiales que varían con las circunstancias. La facilidad consiste sólo en el hecho de que el matemático, al aplicar el método de Arquímedes. sigue caminos libres de prejuicios, caminos que utilizan libremente procesos infinitos manejados sin ningún escrúpulo de rigor. El adjetivo mecánico no expresa pues el hecho de que el método puede ser aplicado *mecánicamente*, sino indica que en el procedimiento se apela a conceptos tomados en préstamo a la mecánica, en particular a la estática, la cual se aplica en la teoría de los baricentros que también es obra de Arquímedes (en la obra: *Del equilibrio de los planos o de los centros de gravedad de las figuras planas*). Y a propósito del doble momento de la investigación matemática (la búsqueda misma conducida con métodos no rigurosos y la subsiguiente sistematización rigurosa), no rehuse el lector un nuevo paralelo con Galileo: en efecto, Arquímedes y Galileo son dos figuras gigantescas que a distancia de casi dos milenios parecen avecinarse misteriosamente. Galileo en el *Diálogo acerca de dos máximos sistemas* escribe refiriéndose precisamente al doble momento antes recordado: "Y no abriguéis duda que Pitágoras mucho antes de haber encontrado la demostración por la cual hizo la hecatombe, se había asegurado que el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto en el triángulo rectángulo era igual a los cuadrados de los otros dos lados: y refiriéndonos siempre a las ciencias demostrativas, la certeza de la conclusión ofrece no poca ayuda para encontrar la demostración."

Para dar una idea del principio rector del *Método* diremos que Arquímedes considera en esta obra una figura plana, por ejemplo un triángulo, como subdividido en "muchas franjitas" obtenidas trazando rectas paralelas entre sí.

Hemos dicho "muchas franjitas", pero en realidad habríamos debido decir "infinitas líneas" porque Arquímedes (ajeno a todo escrúpulo de rigor) se comporta aquí *como si* las franjitas estuvieran privadas de espesor, es decir, fueran líneas. Y estas líneas están en número infinito y su suma *forma, configura* el triángulo.

No es que Arquímedes deje de advertir acá la ausencia de todo rigor matemático: si bien es cierto que las franjas sumadas forman el triángulo, al tratarse de líneas, ¿cómo puede la suma de longitudes, aunque sea en numero infinito, formar un área? Pero, esta contradicción lógica está precisamente en la base de los cimientos del cálculo infinitesimal, cálculo que sólo mucho más tarde, en el siglo XIX, se sistematizará sobre bases lógicas rigurosas.



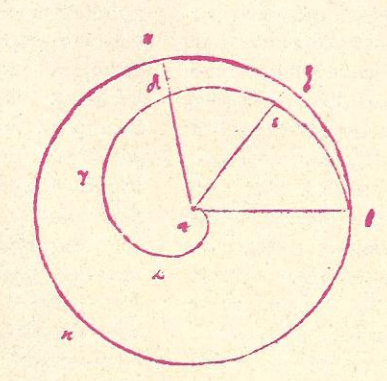
Es notable el hecho de que también en Galileo (el paralelo eterno) la suma de muchas líneas paralelas nos da un área (véase A. Frajese, *op. cit.*, cap. IX, titulado precisamente: *Galileo e la somma dello linee*).

Puede ocurrir además que tanto Arquímedes como Galileo considerasen, con una visión atomística en el campo de lo infinitamente pequeño, estas *líneas* como infinitésimos actuales, es decir, como pequeñas franjas *infinitamente delgadas*.

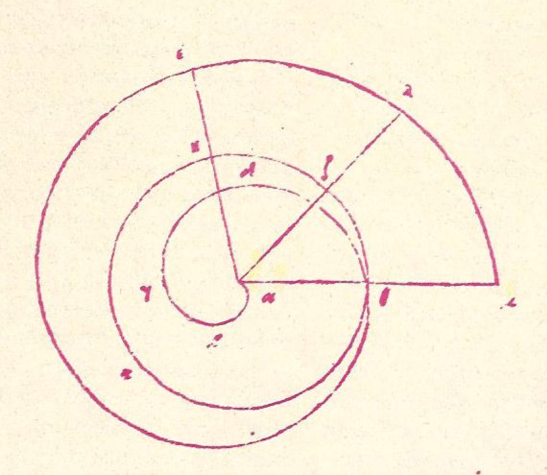
Sea como fuere, en el *Método* las figuras planas se descomponen en infinitas *líneas rectas*, todas ellas paralelas entre sí. Para determinar, por ejemplo, el área de una figura plana F de contorno curvilíneo, se comparan las líneas que constituyen dicha figura F con las líneas que componen otra figura más simple y de área conocida, como, por ejemplo, un triángulo T. Luego se *pesan* las *líneas* (que ahora se suponen materializadas) de la figura F y las *líneas* de la figura conocida T colocando las líneas de F y las de T en las dos extremidades de una palanca y disponiendo las cosas de modo de obtener el equilibrio. Arquímedes deduce entonces, de las leyes del equilibrio de la palanca (es decir, de esta *balanza* de brazos generalmente desiguales) en qué relación se encuentra la figura F respecto de la figura T y deter-

τὸς ἐστὶ τῆς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ εκ τᾶς ἕλικος.

ιδ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τὰς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ αβγδεθ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σημεῖον. ἁ δὲ θα εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θκη. ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ αε, αδ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ἁ αε ποτὶ τὰν αδ, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς αθ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ θκη κύκλου περιφερείας ἐνηνεγμένον ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν αθ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θκζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν αε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τι τὸ α σημεῖον τὰν αδ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θκη περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ αε ποτὶ τὰν αδ, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.



ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περι[...] μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδθ, ἁ μὲν αβγ [...] ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θλεμ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ αε, αλ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ἁ αλ ποτὶ τὰν αε, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θκη μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σημεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν αλ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θκζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν αε εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ἔτι τὰν θκη ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὐτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ἁ αλ γραμμὰ ποτὶ τὰν αε, ὃν ἁ θκζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θκη περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ' ὅλας τὰς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.

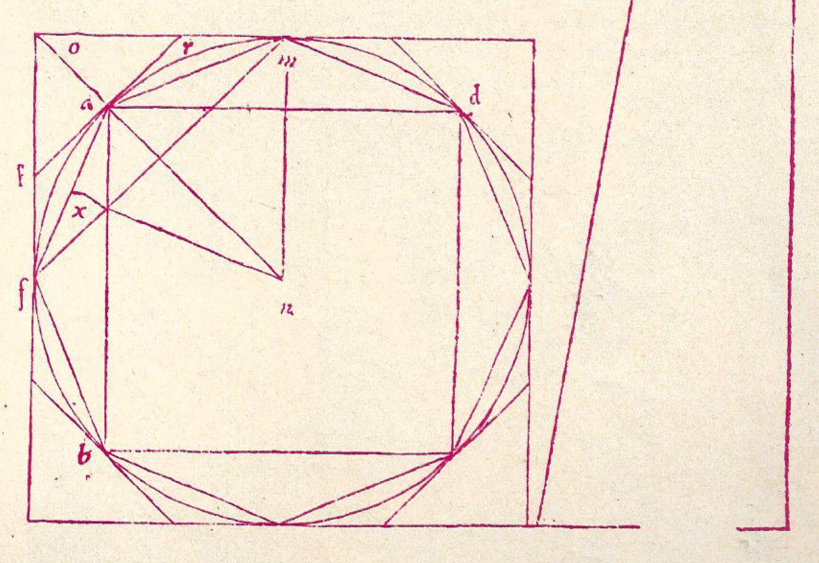


ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.



VILIBET circulus triangulo rectangulo æqualis est, illi uidelicet cuius latus alterum eorum quæ rectum angulum ambiunt, sit dicti circuli semidiametro æqualis, alterum eiusdem circuli circumferentiæ. Esto a b c d circulus, sic habeat sicut proponitur. Dico, quod æqualis est e triangulo. Et si fieri potest, esto circulus dicto triangulo maior, & inscribatur circulo quadratum a c, & diuidantur arcus per æqualia, ducanturq; ad puncta diuisionum lineæ rectæ, fiantq; hoc modo intra circulum figuræ rectilineę, donec inciderimus in aliquam figuram rectilineã, quæ sit maior dicto triangulo: & ponatur centrum n. & sit super unum latus figuræ perpendicularis n x. igitur n x est minor latere trianguli. Est etiam linea claudens figuram, minor reliqua trianguli linea, cum sit minor circuli limbo. Dicta igitur figura minor est dicto triangulo: quod quidem absurdum est. Esto item si fieri potest, sit triangulo circulus minor, & circulo circumscribatur quadratum, & arcus inter puncta cõtingentiæ circuli interclusi in æqua diuidantur. & per puncta diuisionum ducantur lineę contingentes. rectus igitur angulus à lineis o a r ambitur, quare o r erit maior r m. nã r m, r a sunt æquales, & triãgulus r o p est maior figura o f a m q; dimidium: quare & maior dimidio eius partis quadrati circulo circumscripti, quæ est ex parte o. Sumptæ sint itaq; portiones similes ipsi p f a, quæ sint minores eo, quo triangulus e superat circulum a b c d: atque idcirco ipsa quoque figura rectilinea circulo circumscripta, minor erit triangulo e. quod item absurdum est. nam maior esse probatur: quia n a æqualis est perpendiculari trianguli, limbus uero dictæ figuræ base trianguli maior habetur. quare circulus dicto triangulo erit necessariò æqualis.

PRoportio circuli cuiuscũque ad quadratũ suæ diametri est, sicut undecim ad quatuordecim. Esto circulus, cuius diametrus a b & circumscribatur ei quadratum c g: & ipsa c d dupla sit d e: ipsius etiam c d, sit e f pars septima. Quoniam igitur c e ad c d eam habet proportionẽ,



quam uicenum primum ad septenum tenet: i c d uero ad e f etiam, quam septenum

mina, por lo tanto, el área de F conociendo el área de la figura T.

El ingenio necesario para aplicar el método, de un modo diferente en cada caso, reside en encontrar convenientemente la figura *fácil* T (el triángulo en nuestro ejemplo) cuyas líneas se comparan con las líneas de la figura *difícil* F.

Arquímedes utiliza su *Método*, entre otras cosas, para determinar el área del llamado segmento parabólico (superficie comprendida entre un arco de parábola y un trozo de línea recta) y también para determinar el volumen de la esfera. Ya no se trata en este caso de una figura plana sino de un cuerpo sólido que, por lo tanto, no se descompone en pequeñas franjas, sino (y que se nos perdone la materialidad del término) en "tajaditas". Sin embargo, estas últimas se conciben como infinitamente delgadas y llegan a ser directamente figuras planas (secciones planas del sólido). Arquímedes compara con su *Método* el volumen de un cilindro y la suma de los volúmenes de la esfera y de un cono determinado, por intermedio de la comparación de las respectivas secciones planas. Encuentra así el volumen de la esfera igual a la diferencia entre el volumen de un cilindro y del cono.

Bonaventura Cavalieri y Luca Valerio, contemporáneos de Galileo, y el mismo Galileo se ocuparon de un procedimiento análogo. La diferencia entre un cilindro y una determinada semiesfera fue llamada "escudilla" por Galileo y se demostró que su volumen era igual al del cono: este camino, dentro de ciertos límites, se acerca al usado por Arquímedes.

Pasemos ahora a dar algunos detalles técnicos acerca del *Método* explicando en forma más amplia de qué modo lo aplicó Arquímedes a la determinación del segmento parabólico. En el caso de que un lector encontrara muy difícil o demasiada fatigosa la lectura de estos detalles, puede sin mayor problema pasar directamente al parágrafo titulado *Las otras obras de Arquímedes.*

Escojamos el ejemplo de aplicación del segmento parabólico, sea por la importancia de la determinación misma, sea porque ya había dejado rastros en la obra de Arquímedes. En efecto, este matemático dedicó a ese problema una obra especial titulada *Cuadratura de la parábola* (la séptima de nuestra lista), en la cual lo trata de un modo rigurosamente clásico aunque emplee algunos conceptos de estática. En la introducción a la breve obra, dice Arquímedes: "Tenía la intención de enviar a Conón un teorema de geometría que no había sido estudiado antes, pero que ahora ha sido estudiado por mí y que yo descubrí en un principio por medio de la mecánica y he expuesto luego por medio de la geometría."

Se trata precisamente de la determinación del área del segmento parabólico y pareciera que en esa frase quiere aludir Arquímedes a su método mecánico de investigación, de acuerdo con lo que nos informa en la introducción al *Método* mismo. Debe señalarse que Arquímedes no utiliza todavía el término equivalente al nuestro de "parábola". Este nombre fue impuesto a la curva, sólo algunos decenios después de Arquímedes, por Apolonio, autor de un tratado célebre dedicado a las secciones cónicas.

Estas secciones son tres y Apolonio las llamó elipse, parábola e hipérbola, tomando los nombres de la nomenclatura del problema clásico llamado *de la aplicación de las áreas* que se remonta por lo menos al siglo v antes de Cristo y que expresa en forma geométrica los problemas que hemos traducido en forma aritmética en las ecuaciones de primero y segundo grado.

La aplicación de las áreas puede hacerse precisamente de tres modos diferentes: aplicación propiamente dicha, que consiste en construir un rectángulo de área dada sobre una base dada, la aplicación por defecto o aplicación elíptica, y que consiste en construir un rectángulo de área dada tomando como base sólo una parte del segmento dado en tanto que la otra parte debe ser la altura del rectángulo mismo; la aplicación por exceso o aplicación hiperbólica, y que consiste en construir un rectángulo de área dada tomando como base un segmento dado más un segmento adjunto igual a la altura del rectángulo a construir.

Apolonio encontró que cada clase de sección cónica estaba en estrecha relación con el correspondiente problema de aplicación de las áreas: de aquí el nombre de elipse, parábola e hipérbola introducidos por él y que pasaron al uso común. Y tan común que el título de la obra de Arquímedes *Cuadratura de la parábola* nos ha llegado con el empleo del término "parábola", indicio de que el título mismo no es el auténtico.

En Apolonio se expone claramente que seccionando, cortando un cono con un plano, se obtienen, según la posición del plano secante, las tres clases de secciones cónicas o, como suele decirse más brevemente, las tres clases de cónicas. En la figura puede verse cómo se obtiene la elipse (izquierda), la parábola (centro) y la hipérbola (derecha), curva esta última que, como se ve, está dividida en dos ramas: por eso se considera el doble cono que se asemeja a una clepsidra.

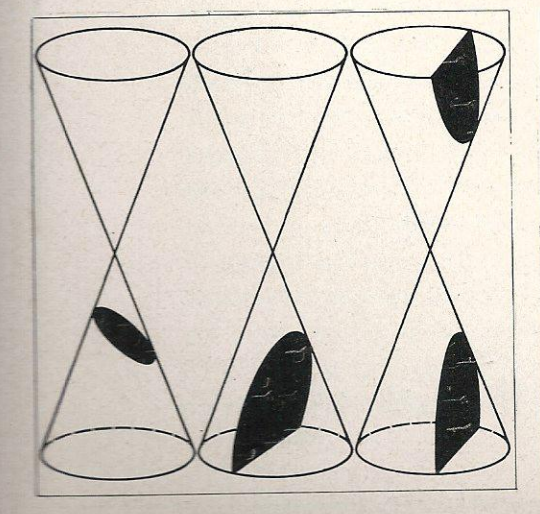
Pero, antes de Apolonio (aunque, según parece, ya Arquímedes había por lo menos entrevisto este punto de vista), las tres clases de secciones cónicas se obtenían de tres clases distintas de conos seccionándolas siempre con un plano perpendicular a una generatriz de los conos mismos. Más precisamente, se obtenía la parábola seccionando un *cono recto* del modo ya dicho, entendiéndose por cono recto el obtenido haciendo rotar alrededor de uno de sus catetos un triángulo rectángulo isósceles. El término usado para indicar la parábola era, por lo tanto, el de *sección de cono recto*. Y precisamente ésta es la nomenclatura que adopta Arquímedes.

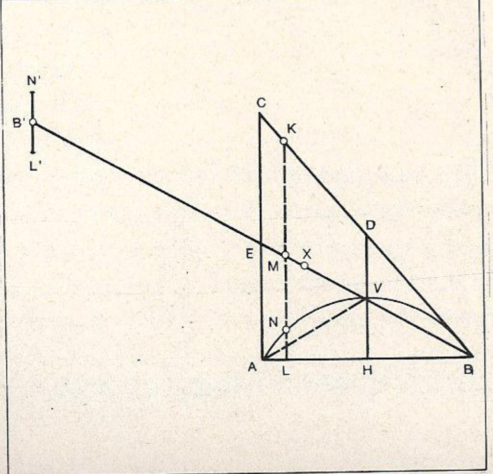
Sea un segmento parabólico AVBH, es decir, la parte del plano comprendida entre el arco de parábola AVB y el segmento de recta AB perpendicular al así llamado *eje* de la parábola VH. El eje es la recta que divide el segmento parabólico en dos mitades simétricas partiendo de un punto V de la parábola llamado *vértice* de la parábola misma.

Se traza por el punto B la tangente BC a la parábola y se determina el punto C en el cual dicha tangente encuentra la recta trazada por el punto A paralelamente al eje HV. Se prolonga luego dicho eje HV hasta cortar en el punto D la tangente trazada previamente.

Arquímedes apela entonces a una conocida propiedad de la parábola según la cual el segmento HV del eje debe ser prolongado una longitud igual para llegar a cortar en D la tangente BC a la parábola: en otros términos, el vértice V de la parábola es el punto medio del segmento DH. Luego: DV = VH.

Por lo tanto, si se traza la línea BV y se





1. Arquímedes según un grabado de 1740. París, Biblioteca Nacional, Gabinete de Grabados.

2. Arquímedes ingeniero de máquinas de guerra, según un grabado.

En las páginas anteriores:

1. Página de la edición griega de Circulo dimensio *(De la medida del círculo).*

2. Arquímedes, Circulis dimensio: *una página de la traducción latina, en la edición de Basilea, 1544.*



1



2

ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER
IS. BARROW, Exprofessorem Lucasianum CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.



LONDINI,
Excudebat Guil. Godbid, vœneunt apud Rob. Scott, in vico
Little Britain. 1675.

1

1. Las obras de Arquímedes en latín, junto con las Cónicas de Apolonio y las Sphaerica *de Teodosio en la edición de Londres, 1675, bajo los cuidados de Isaac Barrow. profesor en Cambridge, y con los tipos de G. Godbin y R. Scott.*

2. Edición de París, 1615, de las obras de Arquímedes, en griego y latín, ilustradas y comentadas.

la prolonga hasta encontrar al segmento AC en E, el punto E es el punto medio de CA. Así también si para un punto cualquiera M de BE, se traza la parábola KL al eje VH, el punto M es el punto medio de KL.

Sea N el punto en el cual el segmento KL encuentra la parábola.

Si ahora comparamos entre sí los dos segmentos KL y NL basándonos en otra propiedad elemental de la parábola (de la cual se sirve Arquímedes), encontramos que la proporción:

KL : NL = AB : AL es válida y también, por el llamado teorema de Tales que:

KL : NL = EB : EM.

Arquímedes ha determinado así la relación entre dos *líneas*: una la podríamos llamar la *línea* del triángulo ABC y es el segmento de recta KL; la otra la podemos llamar la *línea del segmento parabólico* AVBH y es el segmento de recta NL.

Obsérvese que la relación entre la línea del triángulo y la línea del segmento parabólico, es decir, la relación entre KL y NL resulta igual a otra relación entre dos segmentos de recta EB : EM.

De estos dos últimos segmentos, uno (el segmento EB) es fijo, invariable al cambiar la posición del punto M sobre la línea EB. El otro segmento, en cambio, el segmento EM, varía al cambiar la posición de M sobre EB y además el cambio de la posición de M trae aparejado el cambio de la posición del punto N y, por lo tanto, de la línea NL. Pero, detengamos nuestra atención en la posición de M dibujada en la figura.

El hecho notabilísimo es que la proporción KL : NL = EB : EM nos indica que una cierta "palanca" está en equilibrio.

¿De qué palanca se trata? De una que tenga el punto de apoyo en E, un extremo en el punto M y el otro extremo en el punto B′, obtenido, prolongando la línea BE más allá de E una longitud igual, es decir, haciendo EB′ = EB.

Más precisamente, imaginemos ahora haber transportado la línea NL del segmento parabólico a N′L′, siempre paralelamente al eje VH de la parábola y de modo que B′ sea el punto medio de N′L′.

En cambio, dejemos donde está la línea del triángulo, esto es, el segmento KL.

Ahora bien, sobre la palanca B′M con punto de apoyo en E, las dos líneas están en equilibrio: la línea del segmento parabólico en N′L′ y la línea del triángulo en KL. En efecto, una palanca está en equilibrio (como lo expone Arquímedes en otra de sus obras) cuando los "pesos" que actúan en las extremidades son inversamente proporcionales a los respectivos brazos de palanca. Es decir, en nuestro caso se alcanza el equilibrio si:

KL : N′L′ = EB′ : EM

Pero, puesto que N′L′ = NL y EB′ = EB, se obtiene exactamente la proporción que

Arquímedes demostró como válida en base a la propiedad de la parábola.

Si hacemos variar ahora la posición de la línea KL, o sea, la trasladamos paralelamente a sí misma partiendo de CA hacia la derecha, la "línea" se va achicando cada vez más hasta llegar a reducirse a cero, es decir, al punto B. Al mismo tiempo, unida a la línea del triángulo, irá variando la "línea del segmento parabólico": parte de cero (punto A), va creciendo primero hasta alcanzar el valor máximo en VH, luego decrece hasta volver a cero (punto B).

Pero, como ya se dijo, Arquímedes considera el triángulo ABC como *suma* de todas sus "líneas" y el segmento parabólico también como suma de todas sus líneas. Hemos señalado ya que la falta de rigor reside en este pasaje y que la misma intuición, imprecisa pero brillante, se vuelve a encontrar también en Galileo en el estudio del movimiento de la caída de los pesos.

Arquímedes termina transportando *todas las líneas* del segmento parabólico a B', mientras deja *todas las líneas* del triángulo donde están. Pero, hacer tal cosa equivale a concentrar también todas las líneas del triángulo en un solo punto y precisamente en el punto X baricentro del triángulo. (La teoría de los baricentros ha sido expuesta por Arquímedes en otra obra: *Del equilibrio de los planos.*)

En definitiva, todo el segmento parabólico en B' equilibra el triángulo ABC concentrado en X baricentro del triángulo.

Si se indica con P el área del segmento parabólico y con T el área del triángulo ABC tenemos entonces:

$T : = EB' : EX$

Pero, el baricentro de cada triángulo se encuentra sobre una mediana del mismo (es decir, sobre la recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto) y, más precisamente, se encuentra sobre la mediana a una distancia del vértice igual a 2/3 de la longitud de la mediana. Es decir, considerando la mediana BE (la cual es mediana porque es el punto medio de CA), el baricentro se encuentra sobre dicha mediana (por lo tanto, hemos hecho bien en poner el baricentro mismo sobre EB) y la divide en dos partes tales que $BX = 2/3\ EB$ o sea $EX = 1/\ EB$.

Retomando por lo tanto, la condición de equilibrio $T : P = EB' : EX$ o sea: $T : P = EB : EX$, y como EB es el triple de EX se deduce que también T es el triple de P.

Queda determinada así el área P del segmento parabólico: es igual a la tercera parte del área T del triángulo ABC.

Pero, generalmente el resultado se presenta de la siguiente forma:

El triángulo AEB es la mitad del triángulo ACB. Por lo tanto, si indicamos con T' su área, tenemos $T' = 3/2\ P$.

Y si finalmente consideramos el triángulo AVB, inscripto en el segmento parabólico e indicamos con T'' el área, vemos que este área T'' es la mitad del área T'. (En

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΠΑΝΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ
ARCHIMEDIS OPERA
QVAE EXTANT
NOVIS DEMONSTRATIONIBVS
COMMENTARIISQVE ILLVSTRATA

Per DAVIDEM RIVALTVM A FLVRANTIA Cœnomanum, è Regia Turma ſacri Cubiculi, ſanctioribuſque regni Conſiliis & à literarum pietatiſque ſtudiis Chriſtianiſſimi Gallorum & Nauarræ Regis LVDOVICI XIII. ſemper Auguſti.

Operum Catalogus ſequenti pagina habetur.



PARISIIS

Apud CLAVDIVM MORELLVM, via Iacobæa, ad inſigne Fontis.

CIↃ IↃC XV.

EX REGIS PRIVILEGIO.



1

1. Campanile del Duomo. La geometría. Florencia (Alinari).

efecto VH es la mitad de EA al ser AH la mitad de AB.) Por lo tanto, T = 3 P; T' = 3/2 P; T'' = 3/4 P y finalmente P = 4/3 T'', resultado clásico que se expresa diciendo: *El área del segmento parabólico es igual a los cuatro tercios del área del triángulo inscripto.*

Las otras obras de Arquímedes

Nos limitaremos ahora a una brevísima noticia sobre algunas de las otras obras de Arquímedes. Recordemos primeramente el breve escrito sobre la *Medida* del círculo donde se calculan valores aproximados de la relación entre circunferencia y diámetro, es decir del famoso π. Y quizá sea éste uno de los aportes que más contribuyó a través de los siglos a la fama de Arquímedes. Éste calcula el perímetro de polígonos inscriptos y circunscriptos al círculo, polígonos a partir del hexágono, cuyos lados va duplicando hasta llegar al polígono de 96 lados.

El perímetro de los dos polígonos de 96 lados (inscripto y circunscripto), proporcionan valores muy aproximados respectivamente por defecto y por exceso de la longitud de la circunferencia del círculo. Dividiendo tales valores por la longitud del diámetro, Arquímedes encuentra entonces la siguiente limitación para

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

El último valor, aproximado por exceso, se simplifica en:

$$3 + \frac{10}{70} = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

y esta simplísima expresión 22/7 se difundió por doquier y durante toda la Edad Media se la consideró un valor de uso común. Volvemos a encontrar este valor, por ejemplo, en Leonardo Pisano llamado el Fibonacci (comienzos del siglo XIII). Más aún, éste considera que puede simplificar el cálculo de Arquímedes. Leonardo Pisano se expresa así en la Parte IV de su *Practica geometriæ*:

"Debe también demostrarse de qué modo fue encontrado por Arquimenide (¡curiosa deformación del nombre!) que la circunferencia de cualquier círculo es tres veces y un séptimo su diámetro; y ese descubrimiento fue hermoso y muy sutil, pero yo lo he de repetir sin usar los números que él utilizó ya que es posible demostrar del modo más completo usando número más pequeños lo que él demostró utilizando números grandes".

Este es un documento muy importante y puede decirse que marca el acta de nacimiento de la matemática moderna: ¡un hombre del siglo XIII considera que puede mejorar a Arquímedes! Poco importa si después algunos han encontrado defectos en el procedimiento seguido por Fibonacci. Se ha observado también que en el cálculo de los perímetros, Arquímedes utiliza valores de la raíz cuadrada de tres cuya aproximación es óptima.

Arquímedes demuestra en el *Arenario* como con el sistema de escritura de números usada por los griegos (que se basa en el uso de las letras del alfabeto) puede llegarse, mediante recursos oportunos ideados por él, a escribir también números extraordinariamente grandes como por ejemplo el presunto número de todos los granos de arena que llenarían la esfera de las estrellas fijas (por ello, el nombre de *Arenario* dado a la obra). Aquí Arquímedes se revela también como astrónomo en el cálculo de las distancias entre los cuerpos celestes. Y a este respecto, debe asimismo recordarse que según indicaciones que concuerdan, Arquímedes habría construido un eficiente planetario.

En la obra *Del equilibrio de los planos o de los centros de gravedad de las figuras* Arquímedes funda realmente un importante capítulo de la estática con la consideración de los baricentros. En esta obra se encuentra enunciada la célebre ley del equilibrio de la palanca (la proporcionalidad inversa de las fuerzas con respecto a los brazos de la palanca).

Refiriéndose evidentemente a tales leyes y a las investigaciones relativas a las mismas, han llegado hasta nosotros noticias sobre las máquinas construidas por Arquímedes para levantar las naves romanas directamente del agua y, en particular, nos llegó el famoso dicho: "Dadme un punto de apoyo y levantaré la Tierra".

Esta última frase, aunque es evidentemente exagerada y no tiene fundamento histórico seguro, es, sin embargo, muy sugestiva e ilumina a Arquímedes con una luz de grandeza que condice con su gigantesca figura. Y precisamente con tal frase estatuaria nos complace concluir este trabajo dedicado a Arquímedes.

Bibliografía

Además de las primeras ediciones del siglo XVI (en griego —Basilea 1544— y en latín preparada por Commandino, 1558) véase: *Archimedis Opera omnia cum comentariis Eutocii* editadas por J. L. Heiberg (texto griego y traducción latina), Primera edición: Leipzig, 1880-1881; Segunda edición: Leipzig, 1910-1915. *The Works of Archimedes* editadas en notación moderna y con introducción por T. L. Heath, Cambridge, 1897, con suplemento de 1912 para el "Método". Reimpresión reciente, Dover Publications, Inc., Nueva York, s.f. *Les oeuvres completes d'Archimèdes*, traducidas del griego al francés con introducción y notas por P. Ver Eecke, París, Bruselas, 1921. *Archimedes*, por E. J. Dijksterhuis, Copenhague, Eynar Munksgaard, 1956. (Amplia antología del texto con referencia a la terminología moderna. Las notas introductorias y explicativas son particularmente útiles).

E. Rufini: *Il "Metodo" di Archimede e le origine dell'analisi infinitesimales nell' antichita.* Roma, Zanichelli (Boloña), 1926. Reimpresión, Milán, Feltrinelli, 1961. Antonio Favaro: *Archimede.* 2ª ed., Roma, 1923, Formiggini. Además todos los tratados generales de historia de la matemática y sobre todo de historia de la matemática griega dedican amplio espacio a la obra de Arquímedes.

En castellano pueden verse los siguientes trabajos de o sobre Arquímedes:

Arquímedes: *El "Método"* (Traducción de Cora Ratto de Sadosky. Introducción y notas de J. Babini). Buenos Aires, Eudeba, 1966. J. Babini: *Arquímedes*, Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1947. J. J. Schäffer, P. L. Heller: *Arquímedes* (con antología). Buenos Aires, Centro Editor de América Latina, 1969.

Nota. Véase para algunas referencias del texto: A. Frajese: *Galileo matematico*, Roma, Studium, 1964.

Hoy mismo haga el canje de sus fascículos sueltos de LOS HOMBRES de la historia por los tres primeros tomos encuadernados.

TOMO 1. **El mundo contemporáneo,** con las biografías de Churchill, Einstein. Lenin, Gandhi, Hitler, García Lorca, Stalin y Picasso.

TOMO 2. **El siglo XIX: Las revoluciones nacionales,** con las biografías de Lincoln, Darwin, Coubert, Dostoievski, Nietzsche y Wagner.

TOMO 3. **El siglo XIX: La revolución industrial,** con las biografías de Freud. Van Gogh, Tolstoi, León XIII, Bismark, Ford.

Como realizar el canje:

Usted debe entregar personalmente, y en las direcciones citadas, los siguientes fascículos de LOS HOMBRES de la historia:

Para el tomo 1: los fascículos números 2, 5, 6, 9, 11, 14, 18 y 23, en perfecto estado, y la suma de $ 600.-

Para el tomo 2: los fascículos números 8, 13, 15, 20, 22 y 27, en perfecto estado, y la suma de $ 600.-

Para el tomo 3: los fascículos números 1, 10, 21, 24, 31 y 36, en perfecto estado, y la suma de $ 600.-

¡En el mismo momento en que usted entregue los fascículos recibirá los magníficos tomos!

Atención: *los tomos están lujosamente encuadernados en tela plástica, con títulos sobreimpresos en oro y sobrecubierta a todo color. Llevan una cronología y un índice general.*

Si le falta algún fascículo, diríjase a su canillita; el tiene todos los números.

Todos los martes compre LOS HOMBRES de la historia y conserve los fascículos en perfecto estado.

Así podrá seguir canjeándolos y formar con los tomos encuadernados una valiosa Biblioteca de la Historia Universal a través de sus protagonistas.

Próximamente: *aparición del cuarto tomo.*

CANJE POR CORREO

Si usted desea efectuar el canje por CORREO, deberá enviar los fascículos a

CENTRO EDITOR DE AMERICA LATINA S.A.
RINCON 87 - CAPITAL FEDERAL

Agregue la suma de $ 600 por el tomo y $ 100 para gastos de envío, en cheque o giro postal a la orden del Centro Editor de América Latina S. A.

IMPORTANTE

Como los fascículos deben llegar en perfecto estado, tome todas las precauciones. Envuélvalos en cartón muy grueso, o entre maderas o en una caja resistente de cartón o madera. No forme rollos.

Cuando usted tenga los tomos en sus manos, comprobará que ésta es una oferta excepcional que el CENTRO EDITOR DE AMERICA LATINA brinda a sus lectores. El precio en plaza de cada tomo sería de, por lo menos, cuatro veces más.

Para realizar el canje personalmente, diríjase a:

CAPITAL:

Librería AZCUENAGA - Azcuénaga 830
Librería GONZALEZ - Nazca 2313
Librería JUAN CRISTOBAL - Galería Juramento - Cabildo y Juramento - Loc. 1 Subsuelo
Librería LETRA VIVA - Coronel Díaz 1837
Librería LEXICO - J. M. Moreno 53
LIBROS DIAZ - Mariano Acosta 11 y Rivadavia 11440 - Locales 46 y 47
Librería PELUFFO - Corrientes 4279
Librería SANTA FE - Santa Fe 2386 y Santa Fe 2928
Librería SEVILLA - Córdoba 5817
Librería TONINI - Rivadavia 7302 y Rivadavia 4634
VENDIAR - Hall Constitución

GRAN BUENOS AIRES:

Avellaneda
Librería EL PORVENIR - Av. Mitre 970

Hurlingham
MUNDO PLAST - Av. Vergara 3167

San Martín
Librería DANTE ALIGHIERI - San Martín 64 - Galería Plaza

INTERIOR:

BUENOS AIRES

Bahía Blanca
Librería LA FACULTAD - Moreno 95
Librería TOKI EDER - Brown 153
LA CASA DE LAS REVISTAS - Alsina 184

La Plata
Librería TARCO - Diagonal 77 Nº 468

Mar del Plata
Librería ERASMO - San Martín 3330
REVISLANDIA - Av. Luro 2364

Pergamino
PERGAMINO EDICIONES - Merced 664

CATAMARCA
MAURICIO DARGOLTZ - Rivadavia 626

CORDOBA

Coronel Moldes
CASA GARCIA - Belgrano 160

CORRIENTES
LIBRERIA DEL UNIVERSITARIO - 25 de Mayo, esquina Rioja

CHACO

Resistencia
CASA GARCIA - Carlos Pellegrini 41

ENTRE RIOS

Concepción del Uruguay
A. MARTINEZ PIÑON - 9 de Julio 785

Paraná
EL TEMPLO DEL LIBRO - Uruguay 208

MENDOZA
CENTRO INTERNACIONAL DEL LIBRO - Galería Tonsa - Local A-26

MISIONES

Posadas
Librería PELLEGRINI - Colón 280 - Locales 12 y 13

RIO NEGRO

Gral. Roca
QUIMHUE LIBROS - Tucumán 1216

SALTA
Librería SALTA - Buenos Aires 29

SAN JUAN
Librería SAN JOSE - Rivadavia 183 - Oeste

SANTA FE

Rafaela
Librería EL SABER - Sarmiento 138

Rosario
Librería AMERICA LATINA - Galería Melipal - Loc. 10 - Córdoba 1371
Librería ARIES - Entre Ríos 687
Librería LA MEDICA - Córdoba 2901

Santa Fe
Librería COLMEGNA - San Martín 2546
LIBRETEX S. R. L. - San Martín 2151

SANTIAGO DEL ESTERO
Librería DIMENSION - Galería Tabycast - Loc. 19

TUCUMAN
NEW LIBROS - Maipú 150 - Local 13



Centro Editor de América Latina
más libros para más

Precio de venta	ARGENTINA: $150.-	CHILE:	GUATEMALA:	PARAGUAY:
	BOLIVIA:	REP. DOMINICANA:	HONDURAS:	PERU: S/. 18
Publicación semanal	COLOMBIA: $ 7.-	ECUADOR:	MEXICO: $ 5.-	PUERTO RICO
	COSTA RICA:	EL SALVADOR:	NICARAGUA:	URUGUAY: $ 90